УДК 517.928

Р.І. Петришин, Т.М. Сопронюк
R.I. Petryshyn, T.M. Sopronyuk

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
Україна, 58012, Чернівці, вул. Коцюбинського, 2

ВЛАСТИВОСТІ МАТРИЦАНТА ЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ З ФІКСОВАНИМИ МОМЕНТАМИ ІМПУЛЬСНОЇ ДІЇ

PROPERTIES OF MATRIZANT OF LINEAR SYSTEM WITH FIXED MOMENTS OF IMPULSE INFLUANCE

Грунтуючись на оцінці матриціанта лінійної системи без імпульсної дії, отримано експоненціальну оцінку матриціанта відповідної системи з фіксованими моментами імпульсної дії. Досліджено також поведінку частинних похідних цього матриціанта по малому параметру ε.

On the base of the estimation of matrizant of linear system without impulse influence the exponential estimation of matrizant of a respective system with fixed moments of impulse influence has been established. The behavior of partial derivatives of this matrizant relating to small parameter ε has also been researched.

Системи лінійних диференціальних рівнянь з імпульсною дією у фіксовані моменти часу широко вивчались у роботах [1,2]. Важливу роль у таких дослідженнях відіграє поведінка нормальної фундаментальної матриці. Зазначимо, що експоненціальні оцінки матриціанта системи звичайних диференціальних рівнянь з імпульсною дією суттєво застосовуються при вивченні властивостей матрицантів більш складних систем, наприклад, систем зі швидкоосцилюючими коефіцієнтами і функціональними моментами імпульсної дії (класифікацію моментів імпульсної дії наведено у статті [3]). Тому отримані у даній роботі оцінки є актуальними.

Розглядається система лінійних диференціальних рівнянь з фіксованими моментами імпульсної дії

$$\frac{dx}{d\tau} = A(\tau)x, \qquad \Delta x|_{\tau=\tau_j} = B_j(\varepsilon)x, \tag{1}$$

де $x \in R^n$, $\tau \in R$, $j \in Z$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0] \ni \varepsilon-$ малий параметр, матриця $A(\tau)$ неперервна при $\tau \in R$, матриці $B_j(\varepsilon)$ l раз диференційовані по ε та виконуються оцінки

$$\|A(\tau)\| \leq \sigma, \quad \|B_j(\varepsilon)\| \leq \varepsilon\sigma, \quad \|B_j^{(m)}(\varepsilon)\| \leq \sigma, \quad \sigma = const, \tag{2}$$

для всіх $\tau \in R$, $j \in Z$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $m = \overline{1, l}$.

Вважаємо, що моменти імпульсної дії τ_j задовольняють нерівність

$$\tau_{j+1} - \tau_j \geq \varepsilon\theta \tag{3}$$

для всіх $j \in Z$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ з деякою додатною сталою θ.

Позначимо через $Q_t^\tau(\varepsilon)$ матрицант системи (1). Припустимо, що виконується оцінка

$$\|Q_t^\tau(\varepsilon)\| \leq Ke^{-\gamma(\tau-t)}, \quad \tau \geq t, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0],$$

з деякими сталими $K \geq 1$ і $\gamma > 0$, не залежними від ε. Ставиться задача – дослідити оцінку частинних похідних $\dfrac{\partial^m}{\partial\varepsilon^m} Q_t^\tau(\varepsilon), m = \overline{1, l}$.

Оскільки

$$Q_t^\tau(\varepsilon) = E + \int\limits_t^\tau A(\xi) Q_t^\xi(\varepsilon) d\xi + \sum_{t \leq \tau_j < \tau} B_j(\varepsilon) Q_t^{\tau_j}(\varepsilon),$$

то

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon} Q_t^\tau(\varepsilon) = \int\limits_t^\tau A(\xi) \frac{\partial}{\partial\varepsilon} Q_t^\xi(\varepsilon) d\xi + \sum_{t \leq \tau_j < \tau} B_j'(\varepsilon) Q_t^{\tau_j}(\varepsilon) + \sum_{t \leq \tau_j < \tau} B_j(\varepsilon) \frac{\partial}{\partial\varepsilon} Q_t^{\tau_j}(\varepsilon),$$

$$\left\|\frac{\partial}{\partial\varepsilon}Q_t^\tau(\varepsilon)\right\| \le \sigma\int\limits_t^\tau\left\|\frac{\partial}{\partial\varepsilon}Q_t^\xi(\varepsilon)\right\|d\xi + \sigma K\sum_{t\le\tau_j<\tau}e^{-\gamma(\tau_j-t)} + \sigma\varepsilon\sum_{t\le\tau_j<\tau}\left\|\frac{\partial}{\partial\varepsilon}Q_t^{\tau_j}(\varepsilon)\right\|.$$

Враховуючи, що

$$\sum_{t\le\tau_j<\tau}e^{-\gamma(\tau_j-t)} < e^{\gamma(t-\tau_1)} + e^{\gamma(t-\tau_1-\varepsilon\theta)} + ... + e^{\gamma(t-\tau_1-j\,\varepsilon\theta)} + ... = \frac{e^{\gamma(t-\tau_1)}}{1-e^{-\gamma\varepsilon\theta}} < \frac{e^{\gamma\theta\varepsilon_0}}{\varepsilon\gamma\theta}$$

і аналог леми Гронуолла-Беллмана для інтегро-сумарних нерівностей [1], маємо

$$\left\|\frac{\partial}{\partial\varepsilon}Q_t^\tau(\varepsilon)\right\| \le K\sigma\frac{e^{\gamma\theta\varepsilon_0}}{\varepsilon\gamma\theta}\prod_{t\le\tau_j<\tau}(1+\sigma\varepsilon)e^{\sigma(\tau-t)} \le \varepsilon^{-1}\frac{K\sigma e^{\gamma\theta\varepsilon_0}}{\gamma\theta}e^{\sigma(1+\theta^{-1})(\tau-t)}.$$

Отримана оцінка є грубою і не дає експоненціального прямування до нуля. Для того, щоб одержати експоненціальне прямування до нуля норм матриць $\dfrac{\partial^m}{\partial\varepsilon^m}Q_t^\tau(\varepsilon), m=\overline{1,l}$, звузимо клас матриць, які визначають систему (1).

Поставимо у відповідність системі (1) систему без імпульсної дії

$$\frac{dx}{d\tau} = A(\tau)x. \tag{4}$$

Нехай матрицант $U(\tau,t)$, $U(\tau,\tau)=E$, системи (4) задовольняє оцінку

$$\|U(\tau,t)\| \le Ke^{-\gamma_0(\tau-t)}, \quad K\ge 1, \quad \gamma_0 > K\sigma/\theta, \quad \tau\ge t. \tag{5}$$

Розглянемо далі теореми, в яких накладаються додаткові обмеження на праві частини системи (1).

Теорема 1. *Припустимо, що матрицант $U(\tau,t)$ задовольняє оцінку (5), матриці $B_j(\varepsilon)$ – умови (2), а моменти імпульсної дії – нерівність (3). Тоді для будь-яких додатних $\gamma<\gamma_0-\sigma K/\theta$, $\gamma_1<\gamma$, всіх $\tau\ge t, m=\overline{1,l}$ і $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ справджуються оцінки*

$$\|Q_t^\tau(\varepsilon)\| \le Ke^{-\gamma(\tau-t)},$$

$$\left\|\frac{\partial^m}{\partial\varepsilon^m}Q_t^\tau(\varepsilon)\right\| \le \varepsilon^{-m}K^{m+1}\sigma\left(\frac{m}{\theta e(\gamma-\gamma_1)}\right)^m e^{-\gamma_1(\tau-t)}. \tag{6}$$

Доведення. Припустимо для зручності, що $\tau_0 < t$, $\tau_1 \geq t$. Матрицант $Q_t^\tau(\varepsilon)$ можна подати наступним чином [1]:

$$Q_t^\tau(\varepsilon) = \begin{cases} U(\tau,t), & t < \tau \leq \tau_1, \\ V_k(\tau,\varepsilon), & \tau_k < \tau \leq \tau_{k+1}, \quad k \geq 1, \end{cases} \tag{7}$$

де

$$V_1(\tau,\varepsilon) = U(\tau,\tau_1)(E + B_1(\varepsilon))U(\tau_1,t),$$

$$V_k(\tau,\varepsilon) = U(\tau,\tau_k)(E + B_k(\varepsilon))\left[\prod_{i=k}^{2} U(\tau_i,\tau_{i-1})(E + B_{i-1}(\varepsilon))\right]U(\tau_1,t),\ k \geq 2.$$

За допомогою методу математичної індукції доведемо нерівності

$$\|V_k(\tau,\varepsilon)\| \leq K(1 + K\varepsilon\sigma)^k e^{-\gamma_0(\tau-t)},$$

$$\left\|\frac{\partial^m V_k(\tau,\varepsilon)}{\partial\varepsilon^m}\right\| \leq k^m \cdot K^{m+1}\sigma(1+K\varepsilon\sigma)^{k-1}e^{-\gamma_0(\tau-t)}, \quad m \geq 1, \quad \tau \in (\tau_k,\tau_{k+1}]. \tag{8}$$

Врахуємо при цьому умови (5) і наступну властивість матриціанта

$$U(\tau,\bar\tau)U(\bar\tau,t) = U(\tau,t), \quad \bar\tau \in (t,\tau).$$

При $k = 1$ одержимо

$$\|V_1(\tau,\varepsilon)\| \leq \|U(\tau,\tau_1)U(\tau_1,t)\| + \|U(\tau,\tau_1)\|\,\varepsilon\sigma \cdot \|U(\tau_1,t)\| \leq K(1+K\varepsilon\sigma)e^{-\gamma_0(\tau-t)},$$

$$\left\|\frac{\partial^m V_1(\tau,\varepsilon)}{\partial\varepsilon^m}\right\| = \left\|U(\tau,\tau_1)B_1^{(m)}(\varepsilon)U(\tau_1,t)\right\| \leq 1 \cdot K^2\sigma e^{-\gamma_0(\tau-t)},$$

$$m \geq 1, \quad \tau \in (\tau_1,\tau_2]. \tag{9}$$

Припустимо, що при $k = j$ справджуються оцінки

$$\|V_j(\tau,\varepsilon)\| \leq K(1 + K\varepsilon\sigma)^j e^{-\gamma_0(\tau-t)},$$

$$\left\|\frac{\partial V_j(\tau,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right\| \leq j \cdot K^2\sigma(1 + K\varepsilon\sigma)^{j-1}e^{-\gamma_0(\tau-t)},$$

$$\left\|\frac{\partial^m V_j(\tau,\varepsilon)}{\partial\varepsilon^m}\right\| \leq j^m \cdot K^{m+1}\sigma(1 + K\varepsilon\sigma)^{j-1}e^{-\gamma_0(\tau-t)}, \quad m \geq 2, \quad \tau \in (\tau_j,\tau_{j+1}]. \tag{10}$$

Тоді при $k = j + 1$ отримаємо ланцюжок рівностей

$$V_{j+1}(\tau,\varepsilon) = U(\tau,\tau_{j+1})(E + B_{j+1}(\varepsilon))\times$$

$$\times U(\tau_{j+1},\tau_j)(E+B_j(\varepsilon))\left[\prod_{i=j}^{2}U(\tau_i,\tau_{i-1})(E+B_{i-1}(\varepsilon))\right]U(\tau_1,t)=$$

$$=U(\tau,\tau_j)(E+\ B_j(\varepsilon))\left[\prod_{i=j}^{2}U(\tau_i,\tau_{i-1})(E+\ B_{i-1}(\varepsilon))\right]U(\tau_1,t)+$$

$$+U(\tau,\tau_{j+1})B_{j+1}(\varepsilon)U(\tau_{j+1},\tau_j)(E+B_j(\varepsilon))\left[\prod_{i=j}^{2}U(\tau_i,\tau_{i-1})(E+B_{i-1}(\varepsilon))\right]U(\tau_1,t).$$

Звідси маємо

$$V_{j+1}(\tau,\varepsilon)=V_j(\tau,\varepsilon)+U(\tau,\tau_{j+1})B_{j+1}(\varepsilon)V_j(\tau_{j+1},\varepsilon),\tag{11}$$

$$\|V_{j+1}(\tau,\varepsilon)\|\le K(1+K\varepsilon\sigma)^j e^{-\gamma_0(\tau-t)}+Ke^{-\gamma_0(\tau-\tau_{j+1})}\varepsilon\sigma\times$$
$$\times K(1+K\varepsilon\sigma)^j e^{-\gamma_0(\tau_{j+1}-t)}=K(1+K\varepsilon\sigma)^{j+1}e^{-\gamma_0(\tau-t)},\quad \tau\in(\tau_{j+1},\tau_{j+2}].\tag{12}$$

З формули (11) дістанемо співвідношення

$$\frac{\partial V_{j+1}(\tau,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}=\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left\{V_j(\tau,\varepsilon)+U(\tau,\tau_{j+1})B_{j+1}(\varepsilon)V_j(\tau_{j+1},\varepsilon)\right\},$$

$$\left\|\frac{\partial V_{j+1}(\tau,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right\|\le j\cdot K^2\sigma(1+K\varepsilon\sigma)^{j-1}e^{-\gamma_0(\tau-t)}+$$

$$+Ke^{-\gamma_0(\tau-\tau_{j+1})}\sigma\left\|V_j(\tau_{j+1},\varepsilon)\right\|+Ke^{-\gamma_0(\tau-\tau_{j+1})}\varepsilon\sigma\left\|\frac{\partial V_j(\tau_{j+1},\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right\|\le$$

$$\le j\cdot K^2\sigma(1+K\varepsilon\sigma)^{j-1}e^{-\gamma_0(\tau-t)}(1+K\varepsilon\sigma)+K^2\sigma(1+K\varepsilon\sigma)^j e^{-\gamma_0(\tau-t)}\le$$
$$\le(j+1)\cdot K^2\sigma(1+K\varepsilon\sigma)^j e^{-\gamma_0(\tau-t)},\quad \tau\in(\tau_{j+1},\tau_{j+2}].\tag{13}$$

Для доведення третьої нерівності з (10) застосуємо відомі формули

$$(j+1)^m=\sum_{l=0}^{m}C_m^l j^{m-l},$$

$$(p(\varepsilon)q(\varepsilon))^{(m)}=\sum_{l=0}^{m}C_m^l p^{(l)}(\varepsilon)q^{(m-l)}(\varepsilon).$$

Використаємо далі нерівність

$$\left\|(p(\varepsilon)q(\varepsilon))^{(m)}\right\|\le\left\|p(\varepsilon)q^{(m)}(\varepsilon)\right\|+\sigma\sum_{l=1}^{m}C_m^l\left\|q^{(m-l)}(\varepsilon)\right\|,\tag{14}$$

яка справджується для деяких m раз дифренційованих функцій $p(\varepsilon)$ і $q(\varepsilon)$ при умові, що всі похідні функції $p(\varepsilon)$ до порядку m включно обмежені сталою σ.

Далі продиференціюємо m раз рівність (11), використовуючи формулу Лейбниця.

$$\frac{\partial^m V_{j+1}(\tau,\varepsilon)}{\partial\varepsilon^m} = \frac{\partial^m V_j(\tau,\varepsilon)}{\partial\varepsilon^m} + U(\tau,\tau_{j+1}) \sum_{l=0}^{m} C_m^l B_{j+1}^{(l)}(\varepsilon) \frac{\partial^{m-l} V_j(\tau_{j+1},\varepsilon)}{\partial\varepsilon^m}.$$

Для оцінки норми згрупуємо перші два доданки, як і у доведенні (13), і застосуємо нерівність (14) для функцій $B_{j+1}(\varepsilon)$ і $\partial V_j(\tau_{j+1},\varepsilon)/\partial\varepsilon$. Тоді дістанемо, що

$$\left\| \frac{\partial^m V_{j+1}(\tau,\varepsilon)}{\partial\varepsilon^m} \right\| \le$$

$$\le j^m \cdot K^{m+1}\sigma(1+K\varepsilon\sigma)^j e^{-\gamma_0(\tau-t)} + Ke^{-\gamma_0(\tau-\tau_{j+1})}\sigma \sum_{l=1}^{m} C_m^l \left\| \frac{\partial^{m-l} V_j(\tau_{j+1},\varepsilon)}{\partial\varepsilon^m} \right\| \le$$

$$\le j^m \cdot K^{m+1}\sigma(1+K\varepsilon\sigma)^j e^{-\gamma_0(\tau-t)} + K^{m+1}\sigma(1+K\varepsilon)^{j-1} \sum_{l=1}^{m} C_m^l j^{m-l} e^{-\gamma_0(\tau-t)} \le$$

$$\le (j+1)^m \cdot K^{m+1}\sigma(1+K\varepsilon\sigma)^j e^{-\gamma_0(\tau-t)}, \quad m \ge 2, \quad \tau \in (\tau_j, \tau_{j+1}]. \qquad (15)$$

Отже, при $k=1$ виконуються нерівності (9), а при $k=j+1$ за умови виконання (10) справджуються нерівності (12),(13) і (15), тому для довільного $k \ge 1$ справедливі оцінки (8). Звідси маємо

$$\|Q_t^\tau(\varepsilon)\| \le K(1+K\varepsilon\sigma)^k e^{-\gamma_0(\tau-t)},$$

$$\left\| \frac{\partial^m Q_t^\tau(\varepsilon)}{\partial\varepsilon^m} \right\| \le k^m \cdot K^{m+1}\sigma(1+K\varepsilon\sigma)^{k-1} e^{-\gamma_0(\tau-t)}, \quad \tau \in (\tau_k, \tau_{k+1}]. \qquad (16)$$

Матрицант $Q_t^\tau(\varepsilon)$ при $\tau \in [t,\tau_1]$ не залежить від ε , тому $\dfrac{\partial}{\partial\varepsilon} Q_t^\tau(\varepsilon) \equiv 0$, і справджуються оцінки (6).

Оскільки кількість імпульсів k на інтервалі (t,τ) не перевищує величини $(\tau-t)/(\theta\varepsilon)$, то з (16) дістанемо, що для будь-якого $\tau \in (\tau_k,\tau_{k+1}], k \in N$, виконуються оцінки

$$\|Q_t^\tau(\varepsilon)\| \le K(1+K\varepsilon\sigma)^{(\tau-t)/(\theta\varepsilon)} e^{-\gamma_0(\tau-t)} \le Ke^{-\left(\gamma_0 - \frac{K\sigma}{\theta}\right)(\tau-t)} \le Ke^{-\gamma(\tau-t)},$$

$$\left\|\frac{\partial^m Q_t^\tau(\varepsilon)}{\partial\varepsilon^m}\right\| \le \left(\frac{\tau-t}{\theta\varepsilon}\right)^m K^{m+1}\sigma e^{-\left(\gamma_0-\frac{K\sigma}{\theta}\right)(\tau-t)} \le$$

$$\le K^{m+1}\sigma\left(\frac{\tau-t}{\varepsilon\theta}\right)^m e^{-(\gamma-\gamma_1)(\tau-t)}e^{-\gamma_1(\tau-t)} \le K^{m+1}\sigma\left(\frac{m}{\theta\varepsilon(\gamma-\gamma_1)e}\right)^m e^{-\gamma_1(\tau-t)}.$$

Теорему доведено.

Зазначимо, що у випадку, коли матриця $A(\tau)$ і матриці $B_j(\varepsilon)$, $j\in Z$, є діагональними, оцінку частинних похідних $\frac{\partial^m}{\partial\varepsilon^m}Q_t^\tau(\varepsilon)$ можна отримати безпосередньо з екпоненціальної оцінки матриканта $Q_t^\tau(\varepsilon)$, не вимагаючи обмеження (5) на матрицант $U(\tau,t)$.

Теорема 2. *Припустимо, що матриці $A(\tau)$ і $B_j(\varepsilon)$, $j\in N$, є діагональними. Якщо виконуються нерівності (2) і (3), а для матрицанта системи (1) – умова*

$$\|Q_t^\tau(\varepsilon)\| \le Ke^{-\gamma(\tau-t)}, \quad \tau\ge t, \quad \varepsilon\in(0,\varepsilon_0],$$

з деякими сталими $K\ge 1$ і $\gamma>0$, не залежними від ε, то існує таке додатне $\varepsilon_1\le\varepsilon_0$, що для будь-якого додатного $\gamma_1<\gamma$, всіх $\tau\ge t$, $m=\overline{1,l}$ і $\varepsilon\in(0,\varepsilon_1]$ справджується оцінка

$$\left\|\frac{\partial^m}{\partial\varepsilon^m}Q_t^\tau(\varepsilon)\right\| \le K\varepsilon^{-m}\left(\frac{m\cdot\max\{2\sigma,1\}}{(\gamma-\gamma_1)\theta e}\right)^m e^{-\gamma_1(\tau-t)}. \qquad (17)$$

Доведення. При множенні діагональних матриць добуток матриць володіє властивістю комутативності, тому перепишемо рівність (7), враховуючи діагональність матриць $(E+B_j(\varepsilon))$ і матриці $A(\tau)$:

$$Q_t^\tau(\varepsilon)=\prod_{j=d(t,\tau)}^{1}(E+B_j(\varepsilon))U(\tau,t), \quad \tau\ge t. \qquad (18)$$

Тут $d(t,\tau)$– кількість імпульсів на інтервалі (t,τ).

Продиференціюємо рівність (18) по ε на кожному півінтервалі $(\tau_k,\tau_{k+1}]$.

Оскільки матрицант $Q_t^\tau(\varepsilon)$ при $\tau\in[t,\tau_1]$ не залежить від ε , то $\dfrac{\partial}{\partial\varepsilon}Q_t^\tau(\varepsilon)\equiv 0$ і виконується оцінка

$$\left\|\frac{\partial}{\partial\varepsilon}Q_t^\tau(\varepsilon)\right\| \le 0\cdot\frac{1}{2\sigma}\left\|Q_t^\tau(\varepsilon)\right\|, \quad \tau\in[t,\tau_1]. \qquad (19)$$

При $k=1$ одержимо

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}Q_t^\tau(\varepsilon)=2\sigma\cdot\frac{1}{2\sigma}B_1'(\varepsilon)U(\tau,t),\qquad \left\|\frac{\partial}{\partial\varepsilon}Q_t^\tau(\varepsilon)\right\|=2\sigma\sum_{i=1}^n\left|\frac{1}{2\sigma}B_{1_{ii}}'(\varepsilon)\right|\cdot|u_{ii}(\tau,t)|,$$

$$\|Q_t^\tau(\varepsilon)\|=\sum_{i=1}^n|1+B_{1_{ii}}(\varepsilon)|\cdot|u_{ii}(\tau,t)|.$$

Тут через $u_{ii}(\tau,t)$ і $B_{1_{ii}}(\varepsilon)$ позначені діагональні елементи матрицанта $U(\tau,t)$ і матриці $B_1(\varepsilon)$ відповідно.

З обмежень (2) випливає, що існує таке додатне $\varepsilon_1\le\varepsilon_0$, що для будь-яких $j\in Z$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_1]$, $i\in[1,n]$, $m>0$ справджуються нерівності

$$\left|\frac{1}{2\sigma}B_{j_{ii}}^{(m)}(\varepsilon)\right|\le\frac{1}{2},\quad |1+B_{j_{ii}}(\varepsilon)|\ge\frac{1}{2},$$

тобто будь-який діагональний елемент матриці $E+B_j(\varepsilon)$ більший або рівний модуля відповідного елемента матриці $B_j^{(m)}(\varepsilon)/(2\sigma)$.

Звідси одержимо оцінку

$$\left\|\frac{\partial}{\partial\varepsilon}Q_t^\tau(\varepsilon)\right\|\le 1\cdot 2\sigma\,\|Q_t^\tau(\varepsilon)\|\,,\quad \tau\in(\tau_1,\tau_2]. \tag{20}$$

Далі при $k=2$ з (18) отримаємо, що

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}Q_t^\tau(\varepsilon)=2\sigma\left[\frac{1}{2\sigma}B_2'(\varepsilon)(E+B_1(\varepsilon))+(E+B_2(\varepsilon))\frac{1}{2\sigma}B_1'(\varepsilon)\right]U(\tau,t),$$

$$\left\|\frac{\partial}{\partial\varepsilon}Q_t^\tau(\varepsilon)\right\|\le 2\sigma\sum_{i=1}^n\left[\left|\frac{1}{2\sigma}B_{2_{ii}}'(\varepsilon)\right|(1+B_{1_{ii}}(\varepsilon))+(1+B_{2_{ii}}(\varepsilon))\left|\frac{1}{2\sigma}B_{1_{ii}}'(\varepsilon)\right|\right]\cdot|u_{ii}(\tau,t)|,$$

$$\|Q_t^\tau(\varepsilon)\|=\sum_{i=1}^n(1+B_{1_{ii}}(\varepsilon))(1+B_{2_{ii}}(\varepsilon))\cdot|u_{ii}(\tau,t)|.$$

Тому маємо оцінку

$$\left\|\frac{\partial}{\partial\varepsilon}Q_t^\tau(\varepsilon)\right\|\le 2\cdot 2\sigma\,\|Q_t^\tau\|\,,\quad \tau\in(\tau_2,\tau_3]. \tag{21}$$

Продовжуючи цей процес, при $k>2$ отримаємо

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}Q_t^\tau(\varepsilon)=2\sigma\sum_{l=k}^{1}\prod_{j=1}^{k}\left(\delta_{lj}E+\frac{B_j^{(1-\delta_{lj})}(\varepsilon)}{(2\sigma)^{1-\delta_{lj}}}\right)U(\tau,t),$$

$$\left\|\frac{\partial}{\partial\varepsilon}Q_t^\tau(\varepsilon)\right\| \le 2\sigma\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{k}\prod_{j=k}^{1}\left|\delta_{lj}E+\frac{B_{j_{ii}}^{(1-\delta_{lj})}(\varepsilon)}{(2\sigma)^{1-\delta_{lj}}}\right||u_{ii}(\tau,t)|, \quad \delta_{lj}=\left\{\begin{array}{ll}0, & l=j,\\ 1, & l\ne j,\end{array}\right.$$

$$\|Q_t^\tau(\varepsilon)\| = \sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{k}(1+B_{j_{ii}}(\varepsilon))\cdot|u_{ii}(\tau,t)|,$$

$$\left\|\frac{\partial}{\partial\varepsilon}Q_t^\tau(\varepsilon)\right\| \le k\cdot 2\sigma\left\|Q_t^\tau\right\|, \quad \tau\in(\tau_k,\tau_{k+1}]. \tag{22}$$

Для отримання оцінки частинних похідних по ε матриціанта $Q_t^\tau(\varepsilon)$ порядку $m>1$ використаємо одну з нерівностей

$$\left|\frac{1}{2\sigma}B_{j_{ii}}^{(m)}(\varepsilon)\right| \le \frac{1}{2} \quad \text{при} \quad \sigma>\frac{1}{2},$$

$$\left|B_{j_{ii}}^{(m)}(\varepsilon)\right| \le \frac{1}{2} \quad \text{при} \quad \sigma\le\frac{1}{2}.$$

Якщо функції $B_j(\varepsilon)$ є m раз диференційовними по ε, то для $\tau\in(\tau_k,\tau_{k+1}]$ аналогічно, як і вище, можна отримати

$$\left\|\frac{\partial^m Q_t^\tau(\varepsilon)}{\partial\varepsilon^m}\right\| \le k\lambda\left\|\frac{\partial^{m-1}Q_t^\tau(\varepsilon)}{\partial\varepsilon^{m-1}}\right\| \le k^m\lambda^m\left\|Q_t^\tau(\varepsilon)\right\| \le k^m\lambda^m K e^{-\gamma(\tau-t)}.$$

Тут $\lambda=\max\{2\sigma,1\}$.

Остаточно, враховуючи нерівності (19)-(22) і те, що кількість імпульсів $d(t,\tau)$ на інтервалі (t,τ) не перевищує величини $(\tau-t)/(\theta\varepsilon)$, отримаємо, що для всіх $\tau\ge t$ і $\varepsilon\in(0,\varepsilon_1]$ виконується ланцюжок нерівностей

$$\left\|\frac{\partial^m Q_t^\tau(\varepsilon)}{\partial\varepsilon^m}\right\| \le \lambda^m\left(\frac{\tau-t}{\varepsilon\theta}\right)^m K e^{-\gamma(\tau-t)} \le \varepsilon^{-m}\lambda^m\left(\frac{m}{(\gamma-\gamma_1)\theta e}\right)^m K e^{-\gamma_1(\tau-t)}.$$

Звідси випливає оцінка (17). Теорему доведено.

1. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием.— Киев: Вища школа, 1987.— 288 с.

2. Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью / *Перестюк Н.А., Плотников В.А., Самойленко А.М., Скрипник Н.В.* — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2007. — 428 с.

3. *Петришин Р. І., Сопронюк Т.М.* Усереднення початкової та крайової задач для одного класу коливних імпульсних систем // Нелінійні коливання.– 2006.– **9**, №1.— С.68–84.

Одержано .07.2009