Міністерство освіти і науки України

Ужгородський національний університет

НАУКОВИЙ ВІСНИК УЖГОРОДСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

серія

МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА

Випуск 20

Ужгород 2010

ББК 22.1+72.4 (4УКР)
У-33
УДК 51+001

Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. матем. і інформ. / Редкол.: П. М. Гудивок (гол. ред.) та інші. – Ужгород: УжНУ, 2010. – Вип. 20. – **??** с.

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ

Рекомендовано до друку Вченою радою УжНУ (протокол №10 від 26.06.2009).

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації Серія КВ №7972.

Адреса редакційної колегії: Україна, 88016 Ужгород, вул. Університетська, 14, математичний факультет УжНУ. Тел. (факс): (0312) 642725.

ЗМІСТ

УДК 517.92

Р. І. Петришин, Т. М. Сопронюк (Чернівецький нац. ун-т)

ПРО МАТРИЦАНТ ОДНОЇ ЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ

Using the estimation of matrizant of auxiliary linear system without impulse influence the exponential estimation of matrizant of a respective system with impulse influence with quickly oscillating coefficients has been established. The behavior of partial derivatives of this matrizant relating to small parameter ε has also been researched.

Використовуючи оцінку матрицанта допоміжної лінійної системи без імпульсної дії, отримано експоненціальну оцінку матрицанта відповідної імпульсної системи зі швидкоосцилюючими коефіцієнтами. Досліджено також поведінку частинних похідних цього матрицанта по малому параметру ε.

Дослідження систем лінійних диференціальних рівнянь зі швидкоосцилюючими коефіцієнтами та імпульсною дією у фіксовані моменти часу проводились у роботах [1-3]. Поведінку таких систем можна аналізувати, вивчаючи властивості нормальної фундаментальної матриці. У роботах [1, 2] одержано оцінку матрицанта лінійної системи з імпульсною дією з рівномірними моментами імпульсної дії (класифікацію фіксованих моментів імпульсної дії наведено у статті [3]). Аналогічну оцінку для таких же систем без імпульсної дії отримано у роботах [2, 4]. В них же оцінено норми частинних похідних матрицанта по малому параметру ε.

Задача даної статті – отримати аналогічні оцінки для систем зі швидкоосцилюючими коефіцієнтами і функціональними моментами імпульсної дії.

Розглянемо систему

$$\frac{dx}{d\tau} = (a(\tau) + A(\varphi, \tau))x, \quad \tau \neq \tau_j,$$

$$\Delta x|_{\tau=\tau_j} = \varepsilon(b_j + B(\varphi, \tau_j))x, \tag{1}$$

в якій $x \in R^n$, $\varphi \in R^m$, $\tau \in R$, τ_j– моменти імпульсної дії, $j \in Z$, $\tau_{j+1} = \tau_j + \varepsilon\theta(\tau_j)$, $\theta(\tau)$ – гладка функція, $(0, \varepsilon_0] \ni \varepsilon$– малий параметр, матриці b_j сталі, матриці $a(\tau)$, $A(\varphi, \tau)$ і $B(\varphi, \tau)$ неперервні в області $(\varphi, \tau) \in R^m \times R$ і 2π- періодичні по кожній із координат φ_ν, $\nu = \overline{1, m}$, вектора φ.

Поряд з системою (1) розглянемо імпульсну задачу Коші

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + f(\varphi, \tau), \quad \tau \neq \tau_j,$$

$$\Delta\varphi|_{\tau=\tau_j} = \varepsilon F(\varphi, \tau_j), \quad \varphi|_{\tau=t_0} = \psi, \tag{2}$$

де $\psi \in R^m, t_0 \in R, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, функції $f(\varphi, \tau)$ та $F(\varphi, \tau)$ обмежені деякою сталою σ_1, неперервні і задовольняють умову Ліпшиця по φ в області $(\varphi, \tau) \in R^m \times R$.

Зазначимо, що при досить малому $\varepsilon_0 > 0$ відображення

$$\varphi \to \varphi + \varepsilon F(\varphi, \tau_j)$$

є взаємно однозначним, тому [5] існує єдиний розв'язок $\varphi = \varphi_{t_0}^{\tau}(\psi, \varepsilon)$ задачі (2) для всіх $\tau \in R$, $t_0 \in R$, $\psi \in R^m$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Цей розв'язок є кусково-неперервною функцією з розривами першого роду в точках τ_j, а величина стрибка в цих точках визначається правою частиною другого рівняння в (2).

Підставивши $\varphi = \varphi_{t_0}^{\tau}(\psi, \varepsilon)$ у систему (1), можна знайти її розв'язок $x = x_{t_0}^{\tau}(y, \psi, \varepsilon)$. Праві частини системи (1) є кусково-неперервними функціями, і при досить малому $\varepsilon_0 > 0$ відображення

$$x \to x + \varepsilon(b_j + B(\varphi_{t_0}^{\tau}(\psi, \varepsilon), \tau_j))x$$

є взаємно однозначним, а тому задача Коші для системи (1) з будь-якою початковою умовою

$$x|_{\tau=t_0} = y$$

має єдиний розв'язок для всіх $\tau \in R$, $t_0 \in R$, $\psi \in R^m$, $y \in R^n$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

Нехай матрицант $Q_t^{\tau}(\varepsilon)$, $Q_t^t(\varepsilon) = E$, лінійної імпульсної системи

$$\frac{dx}{d\tau} = a(\tau)x, \quad \tau \neq \tau_j, \quad \Delta x|_{\tau=\tau_j} = \varepsilon\, b_j\, x$$

задовольняє нерівність

$$\|Q_t^{\tau}(\varepsilon)\| \leq K e^{-\gamma(\tau - t)}, \quad \tau \geq t, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0], \tag{3}$$

з деякими сталими $K \geq 1$ і $\gamma > 0$, не залежними від ε.

У роботі [6] показано, що нерівність (3) можна отримати з оцінки

$$\|U(\tau, t)\| \leq K e^{-\gamma_0(\tau - t)}, \quad \tau \geq t,$$

матриканта $U(\tau, t)$ лінійної системи без імпульсної дії

$$\frac{dx}{d\tau} = a(\tau)x.$$

Припустимо, що $\theta(\tau) \in C_R^l$, $\omega(\tau) \in C_R^l$, $l \geq m$, і

$$W_l(\tau) = \left(\frac{d^g[\theta(\tau)\omega_\nu(\tau)]}{d\tau^g} \right)_{g,\nu=1}^{l,m}, \quad \|(W_l^T(\tau)W_l(\tau))^{-1}W_l^T(\tau)\| \leq \sigma_1,$$

$$\theta_1 \leq \theta(\tau) \leq \theta_2, \quad ||\omega(\tau)|| \leq \sigma_1, \tag{4}$$

$$|\theta'(\tau)| \leq \theta_2, \quad ||\omega'(\tau)|| \leq \sigma_1, \quad \tau \in R, \tag{5}$$

де $\sigma_1, \theta_1, \theta_2$– деякі додатні сталі.

У випадку рівномірних ($\bar{\tau}_j \equiv \tau_{j+1} - \tau_j = \varepsilon\theta_1$) моментів імпульсної дії для матриканта $\Omega_t^{\tau}(\psi, t_0, \varepsilon)$, $\Omega_t^t(\psi, t_0, \varepsilon) = E$, лінійної системи (1), в якій $\varphi = \varphi_{t_0}^{\tau}(\psi, \varepsilon)$ — розв'язок задачі Коші (2), в роботах [1,2] доведено експоненціальну оцінку вигляду

$$\|\Omega_t^{\tau}(\psi, t_0, \varepsilon)\| \leq K_1 e^{-\gamma_1(\tau - t)}, \quad \tau \geq t,\ \psi \in R^m,\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0],\ t_0 \in R, \tag{6}$$

з не залежними від ε сталими $K_1 \geq 1$ і $\gamma_1 \in (0, \gamma)$.

У данній статті встановлено аналогічну оцінку для випадку функціональних моментів імпульсної дії ($\bar{\tau}_j = \varepsilon\theta(\tau_j)$). Досліджено також поведінку частинних похідних матриканта $\Omega_t^{\tau}(\psi, t_0, \varepsilon)$ по малому параметру ε.

Якщо функції $(\theta(\tau)\omega(\tau))^{(\nu)}, \nu = \overline{0,l}$, рівномірно неперервні на R, виконуються умови (4) і одна з нерівностей в (5), то в статті [3] доведено такі оцінки осциляційних інтегралів і сум:

$$\left|\int_{\bar{t}}^{\tau+\bar{t}} \exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int_{\bar{\tau}}^{y}(k,\omega(z))dz\right\}dy\right| \le \sigma_2 ||k||^{-\beta_1}\varepsilon^{\beta_1}, \tag{7}$$

$$\left|\sum_{\bar{t}\le\tau_j<\bar{t}+\tau} \varepsilon\exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int_{\bar{\tau}}^{\tau_j}(k,\omega(z))dz\right\}\right| \le \sigma_2 ||k||\varepsilon^{\beta_2}, \tag{8}$$

де $k = (k_1, ..., k_m) \in \mathbf{Z}^m \setminus \{0\}$, $(k, \omega(z)) = k_1\omega_1(z) + ... + k_m\omega_m(z)$, $\bar{\tau} \in R, \bar{t} \in R$, $\tau \in [0, T]$, $\tau_j/\varepsilon = t_j$, $\beta_1 = 1/(l+1)$ при виконанні першої нерівності в (5), $\beta_1 = 1/(2l+1)$ при виконанні другої нерівності в (5), $\beta_2 = 1/(2l+1)$.

Дослідимо поведінку осциляційних інтеграла і суми

$$I_k(\tau, \bar{\tau}, \bar{t}, \varepsilon) = \int_{\bar{t}}^{\bar{t}+\tau} \Phi(y, \varepsilon)\exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int_{\bar{\tau}}^{y}(k,\omega(z))dz\right\}dy, \tag{9}$$

$$S_k(\tau, \bar{\tau}, \bar{t}, \varepsilon) = \varepsilon\sum_{\bar{t}\le\tau_j<\bar{t}+\tau} \Phi(\tau_j, \varepsilon)\exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int_{\bar{\tau}}^{\tau_j}(k,\omega(z))dz\right\}, \tag{10}$$

для розривної матриці $\Phi(y, \varepsilon)$.

Лема 1. *Нехай:*

1) функції $(\theta(\tau)\omega(\tau))^{(\nu)}, \nu = \overline{0,l}$, рівномірно неперервні на R;

2) виконуються умови (4) і одна з нерівностей (5);

3) матриця $\Phi(y, \varepsilon)$ неперервна по $y \in [\bar{t}, \bar{t}+T]$, крім точок $y = \tau_j$, причому

$$\Delta\Phi|_{y=\tau_j} = \Phi_j(\varepsilon), \qquad \sup_{y\in[\bar{t},\bar{t}+T]} \|\Phi(y,\varepsilon)\| < \infty,$$

4) на кожному півінтервалі $(\tau_j, \tau_{j+1}]$ $\Phi(y, \varepsilon)$ задовольняє умову Ліпшиця по y зі сталою $L(\varepsilon)$, незалежною від j.

Тоді існує таке досить мале $\varepsilon_0 > 0$, що для всіх $\bar{t} \in R$, $\bar{\tau} \in R$, $\tau \in [0, T]$, $k \ne 0$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ справедливі оцінки

$$\|I_k(\tau, \bar{\tau}, \bar{t}, \varepsilon)\| \le \sigma_3\varepsilon^{\beta_1/2}\left(||k||^{-\beta_1}\sup_{[\bar{t},\bar{t}+T]}\|\Phi(y,\varepsilon)\| + \sum_{\bar{t}\le\tau_j<\bar{t}+T}\|\Phi_j(\varepsilon)\| + L(\varepsilon)\right), \tag{11}$$

$$\|S_k(\tau, \bar{\tau}, \bar{t}, \varepsilon)\| \le \sigma_3||k||\varepsilon^{\beta_2}\left(\sup_{[\bar{t},\bar{t}+T]}\|\Phi(y,\varepsilon)\| + \sum_{\bar{t}\le\tau_j<\bar{t}+T}\|\Phi_j(\varepsilon)\| + L(\varepsilon)\right), \tag{12}$$

в яких стала $\sigma_3 = \sigma_3(T)$ не залежить від $\bar{t}, \bar{\tau}, k$ і ε.

Доведення. Доведення нерівності (12) співпадає з доведенням у статті [1] при заміні використаної там оцінки типу (8) для рівномірних моментів імпульсної дії ($\bar{\tau}_j = \varepsilon\theta_1$) оцінкою (8) для функціональних моментів імпульсної дії ($\bar{\tau}_j = \varepsilon\theta(\tau_j)$).

Для встановлення нерівності (11) зафіксуємо досить мале $\Delta > 0$ (його ми означимо нижче) і подамо відрізок $[\bar{t}, \bar{t}+\tau]$ у вигляді

$$[\bar{t}, \bar{t}+\tau] = \bigcup_{\nu=0}^{s} [l_\nu, l_{\nu+1}],$$

де $l_0 = \bar{t}, l_{\nu+1} - l_\nu = \Delta$ при $\nu < s$, $l_{s+1} = \tau, s$ – ціла частина числа τ/Δ. Тоді

$$I_k(\tau, \bar{\tau}, \bar{t}, \varepsilon) = \sum_{\nu=0}^{s} \int_{l_\nu}^{l_{\nu+1}} \Phi(y, \varepsilon) \exp\left\{ \frac{i}{\varepsilon} \int_{\bar{\tau}}^{y} (k, \omega(z)) dz \right\} dy =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{s} \left[\int_{l_\nu}^{l_{\nu+1}} \Bigl(\Phi(y, \varepsilon) - \Phi(l_\nu, \varepsilon) \Bigr) \exp\left\{ \frac{i}{\varepsilon} \int_{\bar{\tau}}^{y} (k, \omega(z)) dz \right\} dy + \right.$$

$$\left. \int_{l_\nu}^{l_{\nu+1}} \Phi(l_\nu, \varepsilon) \exp\left\{ \frac{i}{\varepsilon} \int_{\bar{\tau}}^{y} (k, \omega(z)) dz \right\} dy \right].$$

Нехай на відрізку $[l_\nu, y]$ знаходяться p часових моментів імпульсної дії $q_1, q_2, ..., q_p$. Тоді для будь-якого $y \in [l_\nu, l_{\nu+1}]$ виконується ланцюжок нерівностей

$$\|\Phi(y,\varepsilon) - \Phi(l_\nu, \varepsilon\| \le \|\Phi(y,\varepsilon) - \Phi(q_p, \varepsilon)\| + ... + \|\Phi(q_2,\varepsilon) - \Phi(q_1,\varepsilon)\| + \|\Phi(q_1,\varepsilon) - \Phi(l_\nu,\varepsilon)\| \le$$

$$\le \bigl(\|\Phi(y,\varepsilon) - \Phi(q_p + 0, \varepsilon)\| + \|\Phi_{q_p}(\varepsilon)\| \bigr) + ... + (\|\Phi(q_2,\varepsilon) - \Phi(q_1+0,\varepsilon)\| + \|\Phi_{q_1}(\varepsilon)\|) +$$
$$+ (|\Phi(q_1,\varepsilon) - \Phi(l_\nu,\varepsilon)\|) \le$$
$$\le L(\varepsilon) \left(|y - q_p| + ... + |q_2 - q_1| + |q_1 - l_\nu| \right) + \bigl(\|\Phi_{q_p}(\varepsilon)\| + ... + \|\Phi_{q_1}(\varepsilon)\| \bigr).$$

З цих нерівностей та оцінки (7) дістанемо, що

$$\|I_k(\tau, \bar{\tau}, \bar{t}, \varepsilon)\| \le (s+1) L(\varepsilon) \Delta^2 + \Delta \sum_{\bar{t} \le \tau_j < \bar{t}+T} \|\Phi_j(\varepsilon)\| + \sigma_2 (s+1) \sup_{[\bar{t}, \bar{t}+T]} \|\Phi(y,\varepsilon)\| ||k||^{-\beta_1} \varepsilon^{\beta_1}.$$

Виберемо $\Delta = \varepsilon^{\beta_1/2}$ і врахуємо, що $s \le T/\Delta$. Тоді отримаємо оцінку (11) зі сталою $\sigma_3 = 2T(1+\sigma_2)$. Лему доведено.

Дослідимо тепер поведінку осциляційних інтеграла і суми

$$\bar{I}_k(\tau, \bar{\tau}, \bar{t}, \varepsilon) = \int_{\bar{t}}^{\bar{t}+\tau} \Pi_k(y, \varepsilon) \exp\left\{ \frac{i}{\varepsilon} \int_{\bar{\tau}}^{y} (k, \omega(z)) dz \right\} dy,$$

$$\bar{S}_k(\tau, \bar{\tau}, \bar{t}, \varepsilon) = \varepsilon \sum_{\bar{t} \le \tau_j < \bar{t}+\tau} \Pi_k(\tau_j, \varepsilon) \exp\left\{ \frac{i}{\varepsilon} \int_{\bar{\tau}}^{\tau_j} (k, \omega(z)) dz \right\},$$

де

$$\Pi_k(y,\varepsilon)=q_k(y,\varepsilon)\exp\{i(k,\theta^y_{\bar\tau})\}g(y,\varepsilon),\quad \theta^y_{\bar t}=\varphi^y_{\bar t}-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\bar t}^{y}\omega(z)dz,$$

а $q_k(y,\varepsilon)$ і $g(y,\varepsilon)$ — матриці таких розмірів, що визначений добуток $q_k(y,\varepsilon)g(y,\varepsilon)$.

Лема 2. *Нехай виконуються умови 1), 2) леми 1 і умови 3), 4) для матриць $q_k(y,\varepsilon)$, функція $g(y,\varepsilon)$ - неперервно диференційовна в кожній точці відрізка $[\bar t,\bar t{+}T]$, крім точок імпульсної дії $y=\tau_j$, причому на кожному відрізку $[\bar t,\bar t{+}T]$, $R\ni\bar t$ — довільне, $0<T$ — фіксоване, справедливі нерівності*

$$\|\Delta g(y,\varepsilon)|_{y=\tau_j}\|\le\varepsilon\sigma_4(\sigma_5+\|g(\tau_j,\varepsilon)\|),\quad \left\|\frac{dg(y,\varepsilon)}{dy}\right\|\le\sigma_4(\sigma_5+\|g(y,\varepsilon)\|),\qquad(13)$$

$$\|\Delta q_k(y,\varepsilon)|_{y=\tau_j}\|\le\varepsilon\tilde q_k(\bar t,T,\varepsilon),\quad L_{q_k}(\varepsilon)<\infty,$$

в яких $\sigma_4,\sigma_5=\sigma_5(\varepsilon)$ – деякі сталі, $L_{q_k}(\varepsilon)$ – сталі Ліпшиця на проміжках неперервності $(\tau_j,\tau_{j+1}]$ функцій $q_k(y,\varepsilon)$.

Тоді при досить малому $\varepsilon_0>0$ для всіх $\bar t\in R$, $\bar\tau\in R$, $\tau\in[0,T]$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ і $k\neq0$ мають місце оцінки

$$\|\bar I_k(\tau,\bar\tau,\bar t,\varepsilon)\|\le\varepsilon^{\beta_1/2}M(\varepsilon),\qquad(14)$$

$$\|\bar S_k(\tau,\bar\tau,\bar t,\varepsilon)\|\le\varepsilon^{\beta_2}||k||M(\varepsilon),\qquad(15)$$

в яких

$$M(\varepsilon)=\sigma_6\left(\sigma_5+\int\limits_{\bar t}^{\bar t+T}\|g(y,\varepsilon)\|dy+\varepsilon\sum_{\bar t\le\tau_j<\bar t+T}\|g(\tau_j,\varepsilon)\|\right)\times$$

$$\times\left(|k||\sup_{[\bar t,\bar t+T]}\|q_k(y,\varepsilon)\|+\tilde q_k(\bar t,T,\varepsilon)+L_{q_k}(\varepsilon)\right),$$

$\sigma_6=\sigma_6(T)$ не залежить від ε, k, $\bar t$ і $\bar\tau$.

Доведення. Оцінимо величину стрибка функції

$$\Pi_k(y,\varepsilon)=q_k(y,\varepsilon)\exp\{i(k,\theta^y_{\bar\tau})\}g(y,\varepsilon)$$

в точках імпульсної дії на відрізку $[\bar t,\bar t+T]$. Маємо

$$\|\Delta\Pi_k(y,\varepsilon)|_{y=\tau_j}\|\le\varepsilon\tilde q_k(\bar t,T,\varepsilon)\sup_{y\in[\bar t,\bar t+T]}\|g(y,\varepsilon)\|+\varepsilon\sigma_4(\sigma_5+\sup_{y\in[\bar t,\bar t+T]}\|g(y,\varepsilon)\|)\times$$

$$\times\sup_{y\in[\bar t,\bar t+T]}\|q_k(y,\varepsilon)\|+\|k\|\varepsilon\sigma_1\sup_{y\in[\bar t,\bar t+T]}\|g(y,\varepsilon)\|\sup_{y\in[\bar t,\bar t+T]}\|q_k(y,\varepsilon)\|.$$

При зроблених обмеженнях на кожному півінтервалі $(\tau_j,\tau_{j+1}]$ функція $\Pi_k(y,\varepsilon)$ задовольняє умову Ліпшиця по y зі сталою $L(\varepsilon)$, яка справджує нерівність

$$L(\varepsilon)\le L_{q_k}(\varepsilon)\sup_{y\in[\bar t,\bar t+T]}\|g(y,\varepsilon)\|+\sigma_4(\sigma_5+\sup_{y\in[\bar t,\bar t+T]}\|g(y,\varepsilon)\|)\sup_{y\in[\bar t,\bar t+T]}\|q_k(y,\varepsilon)\|+$$

$$+\|k\|\sigma_1\sup_{y\in[\bar t,\bar t+T]}\|g(y,\varepsilon)\|\sup_{y\in[\bar t,\bar t+T]}\|q_k(y,\varepsilon)\|.$$

Застосовуючи лему 1, отримаємо нерівність

$$\|\bar{I}_k(\tau,\bar{\tau},\bar{t},\varepsilon)\| \le \sigma_3 \varepsilon^{\beta_1/2}(\sigma_5 + \sup_{y\in[\bar{t},\bar{t}+T]}\|g(y,\varepsilon)\|)\times$$

$$\times\left(2\|k\|(\sigma_1+\sigma_4+1)\sup_{y\in[\bar{t},\bar{t}+T]}\|q_k(y,\varepsilon)\| + \theta_1^{-1}\tilde{q}_k(\bar{t},T,\varepsilon) + L_{q_k}(\varepsilon)\right). \qquad (16)$$

Далі, як і в лемі 35.1 монографії [2], дістаємо оцінку

$$\sup_{y\in[\bar{t},\bar{t}+T]}\|g(y,\varepsilon)\| \le c\int_{\bar{t}}^{\bar{t}+T}[\|\frac{d}{dy}g(y,\varepsilon)\|_1 + \|g(y,\varepsilon)\|_1]dy + c\sum_{\bar{t}\le\tau_j<\bar{t}+T}\|\Delta g(y,\varepsilon)|_{y=\tau_j}\|_1, \qquad (17)$$

$$\|g(y,\varepsilon)\|_1 = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} g(y,\varepsilon)_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \|g(y,\varepsilon)\| = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}|g(y,\varepsilon)_{ij}|.$$

Тут $n\times m$ – розмірність матриці $g(y,\varepsilon)$, c – деяка додатна стала. Враховуючи нерівності (13), (17), із (16) одержимо оцінку (14).

Аналогічно доводимо нерівність (15). Лему доведено.

Для оцінки норм матриці $\Omega_t^{\tau}(t_0,\psi,\varepsilon)$ та її частинних похідних накладемо такі обмеження на функції, що визначають праві частини систем (1), (2):

$$(A(\varphi,\tau);B(\varphi,\tau)) = \sum_k (A_k(\tau);B_k(\tau))e^{i(k,\varphi)},$$

$$\sup_R\|a(\tau)\| + \sum_{k\ne 0}\|k\|^p\left[\|k\|\sup_R\|A_k(\tau)\| + \tilde{A}_k\right] \le \sigma_1, \quad \sup_R\|A_0(\tau)\| \le \alpha_1,$$

$$\sup_j\|b_j\| + \sum_k\|k\|^{p+1}\left[\|k\|\sup_R\|B_k(\tau)\| + \tilde{B}_k\right] \le \sigma_1, \quad \sup_R\|B_0(\tau)\| \le \alpha_2,$$

$$\|A_k(\tau)-A_k(\overline{\tau})\| \le \tilde{A}_k|\tau-\overline{\tau}|, \quad \|B_k(\tau)-B_k(\overline{\tau})\| \le \tilde{B}_k|\tau-\overline{\tau}|, \qquad (18)$$

$$(F(\varphi,\tau);f(\varphi,\tau)) = \sum_k (F_k(\tau);f_k(\tau))e^{i(k,\varphi)}, \quad \gamma - (\alpha_1+\alpha_2/\theta_1)\,K = \tilde{\gamma} > 0,$$

$$\sum_k\|k\|^{p+1}\left[\|k\|\sup_R\|F_k(\tau)\| + \tilde{F}_k\right] \le \sigma_1, \quad \|F_k(\tau)-F_k(\overline{\tau})\| \le \tilde{F}_k|\tau-\overline{\tau}|,$$

$$\sum_{k\ne 0}\|k\|^p\left[\|k\|\sup_R\|f_k(\tau)\| + \tilde{f}_k\right] \le \sigma_1, \quad \|f_k(\tau)-f_k(\overline{\tau})\| \le \tilde{f}_k|\tau-\overline{\tau}|. \qquad (19)$$

Тут $A_k(\tau),B_k(\tau),F_k(\tau),f_k(\tau)$– коефіцієнти Фур'є функцій $A(\varphi,\tau),B(\varphi,\tau)$, $F(\varphi,\tau)$ і $f(\varphi,\tau)$ відповідно, $\tilde{A}_k,\tilde{B}_k,\tilde{F}_k,\tilde{f}_k$ – сталі Ліпшиця, числа α_1 і α_2—досить малі, $p\ge 0$.

Теорема 1. *Якщо виконуються умови (3), (18) при $p=0$ і припущення 1), 2) леми 1, то для всіх додатних $\gamma_1<\tilde{\gamma}$ існують таке досить мале $\varepsilon_0>0$ і досить велике $K_1>0$, що справедлива оцінка (6).*

Доведення. Для довільного $\tau > t$ запишемо зображення [1,2]

$$\Omega_t^\tau = Q_t^\tau + \int\limits_t^\tau Q_\xi^\tau A(\varphi_{t_0}^\xi, \xi)\Omega_t^\xi d\xi + \varepsilon \sum_{t \le \tau_j < \tau} Q_{\tau_j}^\tau B(\varphi_{t_0}^{\tau_j}, \tau_j)\Omega_t^{\tau_j}. \tag{20}$$

Якщо $\tau \in [t, t+1]$, то з рівності (20) безпосередньо знаходимо, що

$$\|\Omega_t^\tau(\psi, t_0, \varepsilon)\| \le K_1 e^{-\gamma_1} \le K_1 e^{-\gamma_1(\tau - t)}, \quad t_0 \in R, \tag{21}$$

де

$$K_1 = 2K e^{\gamma_1 + K[\sigma_1 + \alpha_1 + 2\theta_1^{-1}(\sigma_1 + \alpha_2)]}.$$

Якщо $\tau - t > 1$, то подамо відрізок $[t, \tau]$ у вигляді $\bigcup\limits_{s=0}^{\nu}[l_s, l_{s+1}]$, де $l_0 = t, l_{s+1} - l_s = 1$ при $s < \nu$, $l_{\nu+1} = \tau, \nu$ – ціла частина числа $\tau - t - 1$. Тоді із (20) за допомогою (3) дістанемо нерівність

$$\|\Omega_t^\tau\| \le K e^{-\gamma(\tau - t)} + \alpha_1 K \int\limits_t^\tau e^{-\gamma(\tau - \xi)} \|\Omega_t^\xi\| d\xi + \alpha_2 K \varepsilon \sum_{t \le \tau_j < \tau} e^{-\gamma(\tau - \tau_j)} \|\Omega_t^{\tau_j}\| +$$

$$+ \sum_{k \ne 0} \sum_{s=0}^{\nu} \left(\|I_{sk}\| + \|S_{sk}\|\right), \tag{22}$$

в якій

$$I_{sk} = \int\limits_{l_s}^{l_{s+1}} Q_\xi^\tau A_k(\xi) \exp\left\{i(k, \theta_{t_0}^\xi)\right\} \Omega_t^\xi \exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int\limits_{t_0}^{\xi}(k, \omega(z))dz\right\} d\xi,$$

$$S_{sk} = \varepsilon \sum_{l_s \le \tau_j < l_{s+1}} Q_{\tau_j}^\tau B_k(\tau_j) \exp\left\{i(k, \theta_{t_0}^{\tau_j})\right\} \Omega_t^{\tau_j} \exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int\limits_{t_0}^{\tau_j}(k, \omega(z))dz\right\}, \tag{23}$$

$$\theta_{t_0}^\xi = \varphi_{t_0}^\xi - \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t_0}^{\xi} \omega(z)dz. \tag{24}$$

Розглянемо спочатку осциляційний інтеграл I_{sk} і оцінимо його, застосовуючи лему 2. Нехай

$$g(y, \varepsilon) = \Omega_t^y, \quad q_k(y, \varepsilon) = Q_y^\tau A_k(y).$$

Перевіримо припущення леми 2 на відрізку $[l_s, l_{s+1}]$:

$$\|\Delta g(y, \varepsilon)|_{y=\tau_j}\| \le \varepsilon(2\sigma_1 + \alpha_2)\|\Omega_t^{\tau_j}\|, \quad \left\|\frac{dg(y,\varepsilon)}{dy}\right\| \le (2\sigma_1 + \alpha_1)\|\Omega_t^y\|,$$

$$\|\Delta q_k(y, \varepsilon)|_{y=\tau_\nu}\| \le \varepsilon\sigma_1 \sup_{[l_s, l_{s+1}]} \|Q_y^\tau\| \sup_{[l_s, l_{s+1}]} \|A_k(y)\|,$$

$$L_{q_k}(\varepsilon) \le \tilde{A}_k \sup_{[l_s, l_{s+1}]} \|Q_y^\tau\| + \sigma_1 \sup_{[l_s, l_{s+1}]} \|Q_y^\tau\| \sup_{[l_s, l_{s+1}]} \|A_k(y)\|.$$

Отже, на підставі оцінки (14) при $\sigma_4 = 2\sigma_1 + \alpha_1 + \alpha_2$, $\sigma_5 = 0$ отримаємо, що

$$\|I_{ks}\| \leq \sigma_6 \varepsilon^{\beta_1/2} \left(\int\limits_{l_s}^{l_{s+1}} \|\Omega_t^y\| dy + \varepsilon \sum_{l_s \leq \tau_j < l_{s+1}} \|\Omega_t^{\tau_j}\| \right) \times$$

$$\times \left(||k|| \sup_{[l_s, l_{s+1}]} \|A_k(y)\| \sup_{[l_s, l_{s+1}]} \|Q_y^\tau\| + 2\sigma_1 \sup_{[l_s, l_{s+1}]} \|A_k(y)\| \sup_{[l_s, l_{s+1}]} \|Q_y^\tau\| + \tilde{A}_k \sup_{[l_s, l_{s+1}]} \|Q_y^\tau\| \right) \leq$$

$$\leq \bar{\sigma}_6 \varepsilon^{\beta_1/2} \left(\int\limits_{l_s}^{l_{s+1}} \|\Omega_t^y\| dy + \varepsilon \sum_{l_s \leq \tau_j < l_{s+1}} \|\Omega_t^{\tau_j}\| \right) (\|k\| \sup_{[l_s, l_{s+1}]} \|A_k(y)\| + \tilde{A}_k) K e^{-\gamma(\tau - t - s - 1)},$$

де $\bar{\sigma}_6 = \sigma_6(2)(2\sigma_1 + 1)$. Аналогічно за допомогою леми 2 одержуємо оцінку

$$\|S_{sk}\| \leq \bar{\sigma}_6 ||k|| \varepsilon^{\beta_2} \left(\int\limits_{l_s}^{l_{s+1}} \|\Omega_t^y\| dy + \varepsilon \sum_{l_s \leq \tau_j < l_{s+1}} \|\Omega_t^{\tau_j}\| \right) (\sup_{[l_s, l_{s+1}]} \|B_k(y)\| + \tilde{B}_k) K e^{-\gamma(\tau - t - s - 1)}.$$

Підставимо останні оцінки в нерівність (22) і врахуємо обмеження на коефіцієнти Фур'є (18). Тоді дістанемо нерівність

$$\|\Omega_t^\tau\| \leq K e^{-\gamma(\tau - t)} + K \left(\alpha_1 + 2\sigma_1 \bar{\sigma}_6 e^\gamma \varepsilon^{\beta_1/2} \right) \int\limits_t^\tau e^{-\gamma(\tau - \xi)} \|\Omega_t^\xi\| d\xi +$$

$$+ K \left(\alpha_2 + 2\sigma_1 \bar{\sigma}_6 e^\gamma \varepsilon^{\beta_2} \right) \varepsilon \sum_{t \leq \tau_j < \tau} e^{-\gamma(\tau - \tau_j)} \|\Omega_t^{\tau_j}\|, \tag{25}$$

Враховуючи, що кількість доданків в останній сумі нерівності (25) не більша, ніж $(\tau - t)/(\theta_1 \varepsilon)$, і аналог леми Гронуолла-Беллмана для інтегро-сумарних нерівностей [5], отримаємо нерівність, яка в об'єднанні з нерівністю (21) дає оцінку (6). Теорему доведено.

У випадку систем диференціальних рівнянь без імпульсної дії норми матриць $\dfrac{\partial^r}{\partial \varepsilon^r} \Omega_t^\tau$, $r = \overline{1, p}$, оцінено у роботах [2, 4]. Для встановлення аналогічних оцінок для таких же систем з функціональними моментами імпульсної дії використаємо наступне твердження.

Лема 3. *Нехай виконуються умови 1), 2) леми 1 і обмеження (19). Тоді для довільного додатного* $\mu < \dfrac{\gamma_1}{2}$ *і всіх* $\xi \in R$, $\psi \in R^m$ *існує таке* $\varepsilon_0(\mu) > 0$, *що для всіх* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *виконуються оцінки*

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \varphi_{t_0}^\xi (\psi, \varepsilon) \right\| \leq \sigma_7(\mu) \varepsilon^{-2} e^{\mu |\xi - t_0|}, \tag{26}$$

$$\left\| \frac{\partial^r}{\partial \varepsilon^r} \varphi_{t_0}^\xi (\psi, \varepsilon) \right\| \leq \sigma_{8r} \varepsilon^{\frac{\beta_1}{2} - 2r} e^{\mu r |\xi - t_0|}, \quad 2 \leq r \leq p, \tag{27}$$

з деякими сталими $\sigma_7 = \sigma_7(\mu)$, $\sigma_{8r} = \sigma_{8r}(\mu)$.

Доведення. Розглянемо спочатку випадок $t \geq t_0$. З (2) маємо рівність

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\varphi_{t_0}^{t} = \int\limits_{t_0}^{t}\left(-\frac{\omega(\xi)}{\varepsilon^2} + \frac{\partial f}{\partial\varphi}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\varphi_{t_0}^{\xi}\right)d\xi + \sum_{t_0\leq\tau_j<t} F(\varphi_{t_0}^{\tau_j}, \tau_j) + \varepsilon\sum_{t_0\leq\tau_j<t}\frac{\partial F}{\partial\varphi}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\varphi_{t_0}^{\tau_j}. \quad (28)$$

Якщо $t \in [t_0, t_0+2)$, то, враховуючи нерівності (4) і (19) при $p = 1$, з рівності (28) дістанемо оцінки

$$\left\|\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\varphi_{t_0}^{t}\right\| \leq \frac{2\sigma_1}{\varepsilon^2} + \sigma_1\int\limits_{t_0}^{t}\left\|\frac{\partial\varphi_{t_0}^{\xi}}{\partial\varepsilon}\right\|d\xi + \frac{2\sigma_1}{\varepsilon\theta_1} + \sigma_1\varepsilon\sum_{t_0\leq\tau_j<t}\left\|\frac{\partial\varphi_{t_0}^{\tau_j}}{\partial\varepsilon}\right\|,$$

$$\left\|\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\varphi_{t_0}^{t}\right\| \leq \frac{2\sigma_1}{\varepsilon^2}(1+\theta_1^{-1})e^{2\sigma_1(1+\theta_1^{-1})}. \quad (29)$$

Якщо ж $t \geq t_0 + 2$, то відрізок $[t_0, t]$ подамо у вигляді об'єднання відрізків $[l_s, l_{s+1}]$ одиничної довжини і останнього відрізка, довжина якого не менша одиниці і менша двох, а інтеграл і останню суму, записані в правій частині (28), розкладемо на суму інтегралів і сум по вказаних відрізках. Функції $\dfrac{\partial f}{\partial\varphi}$ і $\dfrac{\partial F}{\partial\varphi}$ розкладемо у ряди Фур'є і розглянемо осциляційні інтеграл і суму

$$I_{sk} = \int\limits_{l_s}^{l_{s+1}} f_k(\xi)\exp\left\{i(k,\theta_{t_0}^{\xi})\right\} i(k_1+...+k_m)\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\varphi_{t_0}^{\xi}\exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int\limits_{t_0}^{\xi}(k,\omega(z))dz\right\}d\xi,$$

$$S_{sk} = \varepsilon\sum_{l_s\leq\tau_j<l_{s+1}} F_k(\tau_j)\exp\left\{i(k,\theta_{t_0}^{\tau_j})\right\} i(k_1+...+k_m)\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\varphi_{t_0}^{\tau_j}\exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int\limits_{t_0}^{\tau_j}(k,\omega(z))dz\right\},$$

де $\theta_{t_0}^{\xi}$ визначено в рівності (24).

Застосовуючи лему 2, оцінимо спочатку осциляційний інтеграл I_{sk}. Нехай

$$q_k(y,\varepsilon) = i(k_1+...+k_m)f_k(y), \quad g(y,\varepsilon) = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\varphi_{t_0}^{y}.$$

Перевіримо припущення леми 2 на відрізку $[l_s, l_{s+1}]$. З нерівностей (19) і (28) одержимо

$$\left\|\frac{dg(y,\varepsilon)}{dy}\right\| \leq \sigma_1\left(\frac{1}{\varepsilon^2} + \left\|\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\varphi_{t_0}^{y}\right\|\right), \quad \|\Delta g(y,\varepsilon)|_{y=\tau_j}\| \leq \varepsilon\sigma_1\left(\frac{1}{\varepsilon^2} + \left\|\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\varphi_{t_0}^{\tau_j}\right\|\right),$$

$$\|\Delta q_k(y,\varepsilon)|_{y=\tau_j}\| = 0, \quad L_{q_k}(\varepsilon) \leq \|k\|\,\tilde{f}_k.$$

Отже, застосуємо оцінку (14) при $\sigma_4 = \sigma_1, \sigma_5 = \varepsilon^{-2}$ і отримаємо оцінку

$$\|I_{ks}\| \leq \sigma_6\varepsilon^{\beta_1/2}\left(\frac{1}{\varepsilon^2} + \int\limits_{l_s}^{l_{s+1}}\left\|\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\varphi_{t_0}^{y}\right\|dy + \sum_{l_s\leq\tau_j<l_{s+1}}\varepsilon\left\|\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\varphi_{t_0}^{\tau_j}\right\|\right)\times$$

$$\times\left(||k||^2\sup_{[l_s,l_{s+1}]}\|f_k(y)\|+||k||\tilde{f}_k\right),$$

в якій сталу $\sigma_6=\sigma_6(2)$ визначено в лемі 2. Аналогічно за лемою 2 одержуємо оцінку осциляційної суми

$$\|S_{sk}\|\leq\sigma_6||k||\varepsilon^{\beta_2}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}+\int\limits_{l_s}^{l_{s+1}}\left\|\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\varphi_{t_0}^{y}\right\|dy+\sum_{l_s\leq\tau_j<l_{s+1}}\varepsilon\left\|\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\varphi_{t_0}^{\tau_j}\right\|\right)\theta\times$$

$$\times\left(||k||^2\sup_{[l_s,l_{s+1}]}\|F_k(y)\|+||k||\tilde{F}_k\right).$$

Підставивши останні оцінки в нерівність (28) і врахувавши (19) при $p=1$, отримаємо нерівність

$$\left\|\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\varphi_{t_0}^{t}\right\|\leq\frac{\sigma_1(1+\sigma_6)}{\varepsilon^2}(1+\frac{1}{\theta_1})(t-t_0)+\sigma_1\sigma_6\varepsilon^{\beta_1/2}\int\limits_{t_0}^{t}\left\|\frac{\partial\varphi_{t_0}^{\xi}}{\partial\varepsilon}\right\|d\xi+\sigma_1\sigma_6\varepsilon^{\beta_2+1}\sum_{t_0\leq\tau_j<t}\left\|\frac{\partial\varphi_{t_0}^{\tau_j}}{\partial\varepsilon}\right\|.$$

На підставі того, що $t-t_0+1$ як фунція змінної t зростає, дістанемо нерівність

$$\frac{1}{t-t_0+1}\left\|\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\varphi_{t_0}^{t}\right\|\leq\frac{\sigma_1(1+\sigma_6)}{\varepsilon^2}(1+\theta_1^{-1})+\sigma_1\sigma_6\varepsilon^{\beta_1/2}\int\limits_{t_0}^{t}\frac{1}{t-\xi+1}\left\|\frac{\partial\varphi_{t_0}^{\xi}}{\partial\varepsilon}\right\|d\xi+$$

$$+\sigma_1\sigma_6\varepsilon^{\beta_2+1}\sum_{t_0\leq\tau_j<t}\frac{1}{t-\tau_j+1}\left\|\frac{\partial\varphi_{t_0}^{\tau_j}}{\partial\varepsilon}\right\|.$$

Об'єднуючи останню нерівность з оцінкою (29), отримаємо, що

$$\left\|\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\varphi_{t_0}^{t}\right\|\leq\sigma_8\varepsilon^{-2}(1+t-t_0)e^{\sigma_8\varepsilon^{\beta_1/2}(t-t_0)},\quad\sigma_8=2\sigma_1(2+\sigma_6)^2(1+\theta_1^{-1})e^{2\sigma_1(1+\theta_1^{-1})},$$

для всіх $t\geq t_0\in R$, $\psi\in R^m$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ при досить малому $\varepsilon_0>0$.

Аналогічно, як і в монографії [2], з останньої нерівності одержуємо оцінку (26).

Розглянемо випадок $r=2$. Для цього продиференціюємо рівність (28) і отримаємо

$$\frac{\partial^2\varphi_{t_0}^{t}}{\partial\varepsilon^2}=\int\limits_{t_0}^{t}\left(\frac{2\omega(\xi)}{\varepsilon^3}+\frac{\partial f}{\partial\varphi}\frac{\partial^2\varphi_{t_0}^{\xi}}{\partial\varepsilon^2}+\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi\partial\varphi_k}\frac{\partial\varphi_{kt_0}^{\xi}}{\partial\varepsilon}\frac{\partial\varphi_{t_0}^{\xi}}{\partial\varepsilon}\right)d\xi+$$

$$+2\sum_{t_0\leq\tau_j<t}\frac{\partial F}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi_{t_0}^{\tau_j}}{\partial\varepsilon}+\varepsilon\sum_{t_0\leq\tau_j<t}\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi}\frac{\partial^2\varphi_{t_0}^{\tau_j}}{\partial\varepsilon^2}+\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi\partial\varphi_k}\frac{\partial\varphi_{kt_0}^{\tau_j}}{\partial\varepsilon}\frac{\partial\varphi_{t_0}^{\tau_j}}{\partial\varepsilon}\right).\qquad(30)$$

Зауважимо, що найбільший порядок росту при $\varepsilon\to 0$ в порівнянні з $\dfrac{1}{\varepsilon}$ в правій частині нерівності (30) мають вирази

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi\partial\varphi_k}\frac{\partial\varphi_k}{\partial\varepsilon}\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon},\quad\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi\partial\varphi_k}\frac{\partial\varphi_k}{\partial\varepsilon}\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon},$$

в яких задіяні перші похідні $\partial\varphi/\partial\varepsilon$, $\partial\varphi_k/\partial\varepsilon, k=\overline{1,m}$.

Тому оцінимо спочатку величину

$$\sum_{k=1}^{m}\left(\int_{t_0}^{t}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi\partial\varphi_k}\frac{\partial\varphi_{kt_0}^{\xi}}{\partial\varepsilon}\frac{\partial\varphi_{t_0}^{\xi}}{\partial\varepsilon}d\xi+\varepsilon\sum_{t_0\le\tau_j<t}\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi\partial\varphi_k}\frac{\partial\varphi_{kt_0}^{\tau_j}}{\partial\varepsilon}\frac{\partial\varphi_{t_0}^{\tau_j}}{\partial\varepsilon}\right).$$

Якщо $t\in[t_0,t_0+2)$, то з оцінки (26) маємо нерівність

$$\left\|\frac{\partial\varphi_k}{\partial\varepsilon}\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon}\right\|\le\sigma_7^2\varepsilon^{-4}e^{2\mu|\xi-t_0|}\le\sigma_7^2\varepsilon^{-4}e^{4\mu}.$$

Якщо $t\in[t_0,t_0+2)$, то з останньої нерівності і нерівностей (4) і (19) при $p=2$ випливають оцінки

$$\left\|\frac{\partial^2\varphi_{t_0}^{t}}{\partial\varepsilon^2}\right\|\le\frac{4\sigma_1}{\varepsilon^3}+\sigma_1\int_{t_0}^{t}\left\|\frac{\partial^2\varphi_{t_0}^{\xi}}{\partial\varepsilon^2}\right\|d\xi+2\sigma_1\sigma_6\sigma_7^2(1+\theta_1^{-1})\varepsilon^{\beta_1/2}\varepsilon^{-4}e^{4\mu}+\frac{4\theta_1}{\varepsilon\theta_1}\sigma_7\varepsilon^{-2}e^{2\mu}+$$

$$+\sigma_1\varepsilon\sum_{t_0\le\tau_j<t}\left\|\frac{\partial^2\varphi_{t_0}^{\tau_j}}{\partial\varepsilon^2}\right\|\le\varepsilon^{\beta_1/2}\frac{4\sigma_1}{\varepsilon^4}(1+\theta_1^{-1})(\sigma_6\sigma_7^2+\sigma_7)2e^{4\mu}e^{2\sigma_1(1+\theta_1^{-1})}.\qquad(31)$$

Якщо ж $t\ge t_0+2$, то розіб'ємо відрізок $[t_0,t]$ на частини $[l_s,l_{s+1}]$ так, як було сказано вище, і розкладемо функції $\dfrac{\partial f}{\partial\varphi}$, $\dfrac{\partial F}{\partial\varphi}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial\varphi\partial\varphi_k}$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial\varphi\partial\varphi_k}$ в ряд Фур' є на кожному відрізку $[l_s,l_{s+1}]$.

Використовуючи лему 2, нерівності (19) при $p=2$ і схему доведення нерівності (26), отримаємо оцінку (27) при $p=2$ і у випадку $t\ge t_0+2$.

Нехай тепер $2<r\le p$ і припустимо, що оцінки (27) для похідних до $r-1$-го порядку включно виконуються. Оскільки

$$\frac{\partial^r}{\partial\varepsilon^r}\varphi_{t_0}^{t}=\int_{t_0}^{t}\left((-1)^r r!\varepsilon^{-r-1}\omega(\xi)+\frac{\partial^r f(\varphi_{t_0}^{\xi},\xi)}{\partial\varepsilon^r}\right)d\xi+$$

$$+\sum_{t_0\le\tau_j<t}\left(\varepsilon\frac{\partial^r F(\varphi_{t_0}^{\tau_j},\tau_j)}{\partial\varepsilon^r}+r\frac{\partial^{r-1}F(\varphi_{t_0}^{\tau_j},\tau_j)}{\partial\varepsilon^{r-1}}\right),$$

то, очевидно, що найбільший порядок росту при $\varepsilon\to0$ в порівнянні з $\dfrac{1}{\varepsilon}$ в правій частині останньої рівності мають вирази

$$\frac{\partial^r f}{\partial\varphi_1^{\xi_1}...\partial\varphi_m^{\xi_m}}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varepsilon}\right)^{\xi_1}...\left(\frac{\partial\varphi_m}{\partial\varepsilon}\right)^{\xi_m},\quad\frac{\partial^r F}{\partial\varphi_1^{\xi_1}...\partial\varphi_m^{\xi_m}}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varepsilon}\right)^{\xi_1}...\left(\frac{\partial\varphi_m}{\partial\varepsilon}\right)^{\xi_m},$$

в яких $\xi_1+...+\xi_m=r$. На підставі нерівності (26) знаходимо, що

$$\left\|\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varepsilon}\right)^{\xi_1}...\left(\frac{\partial\varphi_m}{\partial\varepsilon}\right)^{\xi_m}\right\|\le\sigma_7^r\varepsilon^{-2r}e^{r\mu|\xi-t_0|}.$$

Використовуючи лему 2, нерівності (19) при $p \le 2$ і схему доведення нерівності (26), дістанемо, що при оцінюванні $\left\| \dfrac{\partial^r \varphi_{t_0}^t}{\partial \varepsilon^r} \right\|$ найбільший порядок росту має величина $\varepsilon^{\frac{\beta_1}{2}-2r}$. Таким чином, нерівність (27) справедлива для всіх $r \in [2, p]$ і $t \ge t_0$.

Випадок $t < t_0$ досліджується аналогічно. Лему доведено.

Для оцінки норми матриці $\dfrac{\partial}{\partial \varepsilon}\Omega_t^\tau$ використаємо результати, отримані у теоремі 3.2 роботи [6]. У цій теоремі розглядається диференціальна система без імпульсної дії

$$\frac{dx}{d\tau} = a(\tau)x,$$

і на її матрицант $U(\tau, t)$, $U(\tau, \tau) = E$, накладаються обмеження

$$\|U(\tau, t)\| \le Ke^{-\gamma_0(\tau - t)}, \quad \gamma_0 > \frac{\bar{\sigma}_1 K}{\theta_1}, \quad K \ge 1, \quad \tau \ge t, \tag{32}$$

де $\bar{\sigma}_1$– стала, що задовольняє нерівність

$$\sup_j \|b_j\| \le \bar{\sigma}_1. \tag{33}$$

Доведено [6], що коли матрицант $U(\tau, t)$ задовольняє оцінку (32), то для будь-яких додатних $\gamma < \gamma_0 - \bar{\sigma}_1 K/\theta_1$, $\gamma_1 < \gamma$, всіх $\tau \ge t$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ справджуються оцінки

$$\|Q_t^\tau\| \le Ke^{-\gamma(\tau - t)}, \quad \left\| \frac{\partial}{\partial \varepsilon} Q_t^\tau \right\| \le \theta_1^{-1} \bar{\sigma}_1 K^2 (\gamma - \gamma_1)^{-1} \varepsilon^{-1} e^{-\gamma_1(\tau - t)}. \tag{34}$$

Застосуємо оцінки (26) і (34) для доведення наступного твердження.

Теорема 2. *Припустимо, що*

1)виконуються умови (4), (18), (19), (32), (33) при $p = 1$ *і одна з нерівностей (5);*

2)функції $(\theta(\tau)\omega(\tau))^{(\nu)}, \nu = \overline{0, l}$, *рівномірно неперервні на* R.

Тоді для будь-яких чисел $\gamma_2 \in (0, \gamma_1)$ *і* $\mu \in (0, \gamma_1/2)$ *існують такі досить мале* $\varepsilon_0(\gamma_2) > 0$ *і досить велике* $K_2 = K_2(\mu) > 0$ $(K_2(\mu) \to \infty$ *при* $\mu \to 0)$, *що для всіх* $\tau \ge t \in R$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0(\gamma_2)]$ *справедлива оцінка*

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Omega_t^\tau \right\| \le K_2 \varepsilon^{\beta_1/2 - 2} e^{-\gamma_2(\tau - t) + \mu|t - t_0|}. \tag{35}$$

Доведення. З рівності (20) отримаємо рівність

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\Omega_t^\tau = \frac{\partial}{\partial \varepsilon}Q_t^\tau + \int_t^\tau \frac{\partial}{\partial \varepsilon}Q_\xi^\tau A(\varphi_{t_0}^\xi, \xi)\Omega_t^\xi d\xi + \int_t^\tau Q_\xi^\tau \sum_{\nu=1}^m \frac{\partial}{\partial \varphi_\nu} A(\varphi_{t_0}^\xi, \xi) \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \varphi_{t_0 \nu}^\xi \Omega_t^\xi d\xi +$$

$$+ \int_t^\tau Q_\xi^\tau A(\varphi_{t_0}^\xi, \xi) \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Omega_t^\xi d\xi + \sum_{t \le \tau_j < \tau} Q_{\tau_j}^\tau B(\varphi_{t_0}^{\tau_j}, \tau_j) \Omega_t^{\tau_j} + \varepsilon \sum_{t \le \tau_j < \tau} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} Q_{\tau_j}^\tau B(\varphi_{t_0}^{\tau_j}, \tau_j) \Omega_t^{\tau_j} +$$

$$+\varepsilon \sum_{t\le\tau_j<\tau} Q^{\tau}_{\tau_j} \sum_{\nu=1}^{m} \frac{\partial}{\partial\varphi_\nu} B(\varphi^{\tau_j}_{t_0},\tau_j)\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\varphi^{\tau_j}_{t_0\nu}\Omega^{\tau_j}_t + \varepsilon \sum_{t\le\tau_j<\tau} Q^{\tau}_{\tau_j} B(\varphi^{\tau_j}_{t_0},\tau_j)\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Omega^{\tau_j}_t,$$

$$\varphi^{\xi}_{t_0} = (\varphi^{\xi}_{t_{01}}, ..., \varphi^{\xi}_{t_{0m}}). \tag{36}$$

Позначимо через $D_1, ..., D_8$ послідовно доданки правої частини рівності (36). Доданок D_1 справджує нерівність (34). Оцінимо решту доданків. Враховуючи нерівності (6), (32) та (18), одержимо, що

$$\|D_2 + D_6\| \le \bar{\sigma}_1 \int_t^{\tau} K^2\theta_1^{-1}(\gamma-\gamma_1)^{-1}\varepsilon^{-1}e^{-\gamma_1(\tau-\xi)}K_1e^{-\gamma_1(\xi-t)}d\xi+$$

$$+\bar{\sigma}_1\varepsilon \sum_{t\le\tau_j<\tau} K^2\theta_1^{-1}(\gamma-\gamma_1)^{-1}\varepsilon^{-1}e^{-\gamma_1(\tau-\tau_j)}K_1e^{-\gamma_1(\tau_j-t)} \le$$

$$\le \varepsilon^{-1}\bar{\sigma}_1K^2K_1\theta_1^{-1}(\gamma-\gamma_1)^{-1}(\tau-t)(1+\theta_1^{-1})e^{-\gamma_1(\tau-t)} \le \varepsilon^{-1}\sigma_{10}e^{-\gamma_2(\tau-t)}, \tag{37}$$

де $\sigma_{10} = K^2K_1\theta_1^{-1}\bar{\sigma}_1(\gamma-\gamma_1)^{-1}(\gamma_1-\gamma_2)^{-1}(1+\theta_1^{-1})$.

Враховуючи нерівності (3), (6) і (18), дістанемо

$$\|D_5\| \le \sigma_1 \sum_{t\le\tau_j<\tau} Ke^{-\gamma(\tau-\tau_j)}K_1e^{-\gamma_1(\tau_j-t)} \le \sigma_1KK_1\frac{(\tau-t)e^{-\gamma_1(\tau-t)}}{\varepsilon\theta_1} \le$$

$$\le \sigma_{11}\varepsilon^{-1}e^{-\gamma_2(\tau-t)}, \quad \sigma_{11} = \frac{\sigma_1KK_1}{(\gamma_1-\gamma_2)\theta_1}. \tag{38}$$

Для оцінки доданків D_3 і D_7 застосуємо лему 2 .

Якщо $\tau - t > 1$, то подамо, як і раніше, відрізок $[t,\tau]$ у вигляді $\bigcup\limits_{s=0}^{\nu}[l_s, l_{s+1}]$, де $l_0 = t, l_{s+1} - l_s = 1$ при $s < \nu$, $l_{\nu+1} = \tau, \nu$ – ціла частина числа $\tau - t - 1$. Тоді

$$\|D_3 + D_7\| \le \sum_{k\ne0}\sum_{s=0}^{\nu}\Big(\|I_{sk}\| + \|S_{sk}\|\Big),$$

де

$$I_{sk} = \int_{l_s}^{l_{s+1}} Q^{\tau}_{\xi}A_k(\xi)\exp\left\{i(k,\theta^{\xi}_{t_0})\right\} i\left(k, \frac{\partial\varphi^{\xi}_{t_0}}{\partial\varepsilon}\right)\Omega^{\xi}_t \exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int_{t_0}^{\xi}(k,\omega(z))dz\right\}d\xi,$$

$$S_{sk} = \varepsilon \sum_{l_s\le\tau_j<l_{s+1}} Q^{\tau}_{\tau_j}B_k(\tau_j)\exp\left\{i(k,\theta^{\tau_j}_{t_0})\right\} i\left(k, \frac{\partial\varphi^{\tau_j}_{t_0}}{\partial\varepsilon}\right)\Omega^{\tau_j}_t \exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int_{t_0}^{\tau_j}(k,\omega(z))dz\right\}. \tag{39}$$

Для оцінки осциляційних інтеграла і суми (39) покладемо

$$g(y,\varepsilon) = i\left(e, \frac{\partial\varphi^{y}_{t_0}}{\partial\varepsilon}\right)\Omega^{y}_t, \quad e = \frac{k}{\|k\|},$$

а функцію $q_k(y,\varepsilon)$ для I_{sk} виберемо наступним чином

$$q_k(y,\varepsilon)=Q_y^{\tau}\,\|k\|\,A_k(y).$$

Перевіримо припущення леми 2 на відрізку $[l_s,l_{s+1}]$:

$$\|\Delta q_k(y,\varepsilon)|_{y=\tau_j}\|\le\varepsilon\sigma_1\,\|k\|\sup_{[l_s,l_{s+1}]}\|Q_y^{\tau}\|\sup_{[l_s,l_{s+1}]}\|A_k(y)\|+\|k\|\sup_{[l_s,l_{s+1}]}\|Q_y^{\tau}\|\sup_{[l_s,l_{s+1}]}\|A_k(y)\|,$$

$$L_{q_k}(\varepsilon)\le\|k\|\,\tilde{A}_k\sup_{[l_s,l_{s+1}]}\|Q_y^{\tau}\|+\|k\|\,\sigma_1\sup_{[l_s,l_{s+1}]}\|A_k(y)\|\sup_{[l_s,l_{s+1}]}\|Q_y^{\tau}\|.$$

$$\|\Delta g(y,\varepsilon)|_{y=\tau_j}\|\le\varepsilon(2\sigma_1+\alpha_2)\left(\varepsilon^{-1}\sup_{[l_s,l_{s+1}]}\|\Omega_t^y\|+\|\Omega_t^{\tau_j}\|\left\|\frac{\partial\varphi_{t_0}^{\tau_j}}{\partial\varepsilon}\right\|\right),$$

$$\|\frac{\partial g(y,\varepsilon)}{\partial y}\|\le(2\sigma_1+\alpha_1)\left(\varepsilon^{-2}\sup_{[l_s,l_{s+1}]}\|\Omega_t^y\|+\|\Omega_t^y\|\left\|\frac{\partial\varphi_{t_0}^{y}}{\partial\varepsilon}\right\|\right).$$

Отже, застосувавши оцінку (13) при $\sigma_4=2\sigma_1+\alpha_1+\alpha_2$, $\sigma_5=\varepsilon^{-2}\sup\limits_{[l_s,l_{s+1}]}\|\Omega_t^y\|$, отримаємо

$$\|I_{ks}\|\le\sigma_6\varepsilon^{\beta_1/2}\left(\varepsilon^{-2}\sup_{[l_s,l_{s+1}]}\|\Omega_t^y\|+\int\limits_{l_s}^{l_{s+1}}\left\|\frac{\partial\varphi_{t_0}^{y}}{\partial\varepsilon}\right\|\|\Omega_t^y\|\,dy+\varepsilon\sum_{l_s\le\tau_j<l_{s+1}}\left\|\frac{\partial\varphi_{t_0}^{\tau_j}}{\partial\varepsilon}\right\|\|\Omega_t^{\tau_j}\|\right)\times$$

$$\times\|k\|\left(\|k\|\sup_{[l_s,l_{s+1}]}\|A_k(y)\|+2\sigma_1\sup_{[l_s,l_{s+1}]}\|A_k(y)\|+\tilde{A}_k\right)\sup_{[l_s,l_{s+1}]}\|Q_y^{\tau}\|,$$

$$\|S_{ks}\|\le\sigma_6\,\|k\|^2\,\varepsilon^{\beta_2}\left(\varepsilon^{-2}\sup_{[l_s,l_{s+1}]}\|\Omega_t^y\|+\int\limits_{l_s}^{l_{s+1}}\left\|\frac{\partial\varphi_{t_0}^{y}}{\partial\varepsilon}\right\|\|\Omega_t^y\|\,dy+\varepsilon\sum_{l_s\le\tau_j<l_{s+1}}\left\|\frac{\partial\varphi_{t_0}^{\tau_j}}{\partial\varepsilon}\right\|\|\Omega_t^{\tau_j}\|\right)\times$$

$$\times\left(\|k\|\sup_{[l_s,l_{s+1}]}\|B_k(y)\|+2\sigma_1\sup_{[l_s,l_{s+1}]}\|B_k(y)\|+\tilde{B}_k\right)\sup_{[l_s,l_{s+1}]}\|Q_y^{\tau}\|.$$

Звідси дістанемо

$$\|D_3+D_7\|\le\sigma_{12}\varepsilon^{\beta_1/2}\times$$

$$\times\sum_{s=0}^{\nu}\left(\varepsilon^{-2}\sup_{[l_s,l_{s+1}]}\|\Omega_t^y\|+\int\limits_{l_s}^{l_{s+1}}\left\|\frac{\partial\varphi_{t_0}^{y}}{\partial\varepsilon}\Omega_t^y\right\|dy+\varepsilon\sum_{l_s\le\tau_j<l_{s+1}}\left\|\frac{\partial\varphi_{t_0}^{\tau_j}}{\partial\varepsilon}\Omega_t^{\tau_j}\right\|\right)Ke^{-\gamma(\tau-t-s-1)},$$

де $\sigma_{12}=2\sigma_6(2)(2\sigma_1+1)$. Враховуючи нерівності (6) і (26) і нерівність

$$\sum_{s=0}^{\nu}e^{\delta s}\le\frac{e^{\delta(\tau-t)}}{1-e^{-\delta}}$$

отримаємо, що

$$\|D_3+D_7\|\le\sigma_{13}\varepsilon^{\beta_1/2}\varepsilon^{-2}e^{-\gamma_1(\tau-t)}+\sigma_{14}\varepsilon^{\beta_1/2}e^{-(\gamma_1-\mu)(\tau-t)+\mu(t-t_0)},\tag{40}$$

де

$$\sigma_{13} = \frac{K_1 K \sigma_{12} e^{\gamma}}{1 - e^{\gamma_1 - \gamma}}, \quad \sigma_{14} = \frac{K_1 K \sigma_{12}(1 + \theta_1^{-1}) e^{\gamma+\mu}}{1 - e^{\gamma_1 - \gamma - \mu}}.$$

Залишилось оцінити доданки D_4 і D_8 в рівності (36). Знов застосуємо лему 2, вибравши в якості функцій $g(y,\varepsilon)$ і $q_k(y,\varepsilon)$ для D_4 величини

$$g(y,\varepsilon) = \frac{\partial \Omega_t^y}{\partial \varepsilon}, \quad q_k(y,\varepsilon) = Q_y^{\tau} A_k(y).$$

Припущення леми 2 для функції $q_k(y,\varepsilon)$ вже перевірено при оцінюванні осциляційних інтеграла та суми (23). Перевіримо їх для функції $g(y,\varepsilon)$ на відрізку $[l_s, l_{s+1}]$:

$$\left\| \frac{\partial g(y,\varepsilon)}{\partial y} \right\| \leq (2\sigma_1 + \alpha_1) \left\| \frac{\partial \Omega_t^y}{\partial \varepsilon} \right\| + \sup_{[l_s, l_{s+1}]} \left\| \sum_{\nu=1}^{m} \frac{\partial A(\varphi, y)}{\partial \varphi_\nu} \frac{\partial \varphi_{t_0 \nu}^y}{\partial \varepsilon} \right\| \sup_{[l_s, l_{s+1}]} \|\Omega_t^y\| \leq$$

$$\leq (2\sigma_1 + \alpha_1) \left(\left\| \frac{\partial \Omega_t^y}{\partial \varepsilon} \right\| + \varepsilon^{-2} e^{\mu(s+t+1-t_0)} \bar{\sigma}_7 K_1 e^{-\gamma_1 s} \right),$$

$$\|\Delta g(y,\varepsilon)|_{y=\tau_j}\| \leq (2\sigma_1 + \alpha_2) \sup_{[l_s, l_{s+1}]} \|\Omega_t^y\| + \varepsilon(2\sigma_1 + \alpha_2) \left\| \frac{\partial \Omega_t^{\tau_j}}{\partial \varepsilon} \right\| +$$

$$+\varepsilon \sup_{[l_s, l_{s+1}]} \left\| \sum_{\nu=1}^{m} \frac{\partial B(\varphi, y)}{\partial \varphi_\nu} \frac{\partial \varphi_{t_0 \nu}^y}{\partial \varepsilon} \right\| \sup_{[l_s, l_{s+1}]} \|\Omega_t^y\| \leq$$

$$\leq \varepsilon(2\sigma_1 + \alpha_2) \left(\left\| \frac{\partial \Omega_t^{\tau_j}}{\partial \varepsilon} \right\| + \varepsilon^{-2} e^{\mu(s+t+1-t_0)} \bar{\sigma}_7 K_1 e^{-\gamma_1 s} + \varepsilon^{-1} K_1 e^{-\gamma_1 s} \right).$$

Для суми D_8 при $q_k(y,\varepsilon) = Q_y^{\tau} B_k(y)$ припущення леми 2 також справджуються. Далі застосуємо оцінку (13) при $\sigma_4 = 3\sigma_1 + \alpha_1 + \alpha_2$, $\sigma_5 = 2\varepsilon^{-2} e^{\mu(s+t-t_0)} \bar{\sigma}_7 K_1 e^{-\gamma_1 s}$ і отримаємо

$$\|D_4 + D_8\| \leq \sigma_{15} \varepsilon^{\beta_1/2} \times$$

$$\times \sum_{s=0}^{\nu} \left(2\varepsilon^{-2} e^{\mu(s+t+1-t_0)} \bar{\sigma}_7 K_1 e^{-\gamma_1 s} + \int_{l_s}^{l_{s+1}} \left\| \frac{\partial \Omega_t^y}{\partial \varepsilon} \right\| dy + \varepsilon \sum_{l_s \leq \tau_j < l_{s+1}} \left\| \frac{\partial \Omega_t^{\tau_j}}{\partial \varepsilon} \right\| \right) K e^{-\gamma(\tau - t - s - 1)} \leq$$

$$\leq \sigma_{16} \varepsilon^{\beta_1/2} \varepsilon^{-2} e^{-(\gamma_1 - \mu)(\tau - t) + \mu(t - t_0)} +$$

$$+\sigma_{15} K e^{\gamma} \varepsilon^{\beta_1/2} \left(\int_t^{\tau} e^{-\gamma(\tau - y)} \left\| \frac{\partial \Omega_t^y}{\partial \varepsilon} \right\| dy + \varepsilon \sum_{t \leq \tau_j < \tau} e^{-\gamma(\tau - \tau_j)} \left\| \frac{\partial \Omega_t^{\tau_j}}{\partial \varepsilon} \right\| \right) \qquad (41)$$

з деякою сталою σ_{15} і сталою $\sigma_{16} = \dfrac{2\sigma_{15} \bar{\sigma}_7 K_1 K e^{\gamma+\mu}}{1 - e^{\gamma_1 - \gamma - \mu}}$.

Підставимо оцінки (34), (37)-(38), (40) і (41) доданків $D_1, ..., D_8$ в (36) і дістанемо

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Omega_t^{\tau} \right\| \leq c_1 \Big(\varepsilon^{-1} e^{-\gamma_1(\tau - t)} + \varepsilon^{-1} e^{-(\gamma_1 - \mu)(\tau - t)} + \varepsilon^{\beta_1/2} \varepsilon^{-2} e^{-\gamma_1(\tau - t)} +$$

$$+\varepsilon^{\beta_1/2}\varepsilon^{-2}e^{-(\gamma_1-\mu)(\tau-t)+\mu(t-t_0)}\Bigg)+c_2\varepsilon^{\beta_1/2}\left[\int\limits_t^\tau e^{-\gamma(\tau-y)}\left\|\frac{\partial\Omega_t^y}{\partial\varepsilon}\right\|dy+\varepsilon\sum_{t\le\tau_j<\tau}e^{-\gamma(\tau-\tau_j)}\left\|\frac{\partial\Omega_t^{\tau_j}}{\partial\varepsilon}\right\|\right]$$

зі сталими $c_1=c_1(\mu)=K^2\bar{\sigma}_1\theta_1^{-1}(\gamma-\gamma_1)^{-1}+\sigma_{10}+\sigma_{11}+\sigma_{13}+\sigma_{14}+\sigma_{16}$, $c_2=c_2(2)=\sigma_{15}Ke^{\gamma}$.

З останньої нерівності знаходимо, що

$$e^{(\gamma_1-\mu)(\tau-t)}\left\|\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Omega_t^\tau\right\|\le 4c_1\varepsilon^{\beta_1/2}\varepsilon^{-2}e^{\mu(t-t_0)}+$$

$$+c_2\varepsilon^{\beta_1/2}\left[\int\limits_t^\tau e^{(\gamma_1-\mu)(y-t)}\left\|\frac{\partial\Omega_t^y}{\partial\varepsilon}\right\|dy+\varepsilon\sum_{t\le\tau_j<\tau}e^{(\gamma_1-\mu)(\tau_j-t)}\left\|\frac{\partial\Omega_t^{\tau_j}}{\partial\varepsilon}\right\|\right].$$

Звідси одержимо нерівності

$$\left\|\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Omega_t^\tau\right\|\le 4c_1\varepsilon^{\beta_1/2}\varepsilon^{-2}e^{\mu(t-t_0)}e^{-(\gamma_1-\mu)(\tau-t)}(1+c_2\,\varepsilon\varepsilon^{\beta_1/2})^{\frac{\tau-t}{\theta_1\varepsilon}}e^{c_2\,\varepsilon^{\beta_1/2}(\tau-t)}\le$$

$$\le 4c_1\varepsilon^{-2}\varepsilon^{\beta_1/2}e^{\mu(t-t_0)}e^{-(\gamma_1-\mu-c_2\,\varepsilon^{\beta_1/2}(1+\theta_1^{-1}))(\tau-t)}.$$

Отже, оцінка (35) справджується для всіх $\tau>t+1$, $t_0\ge t$, $\psi\in R^m$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ при $K_2=4c_1(\mu)$, а ε_0 вибираємо з умови $c_2\varepsilon_0^{\beta_1/2}(1+\theta_1^{-1})\le\mu$.

Легко переконатися, що оцінка (35) справедлива і у випадку $\tau\in[t,t+1]$. Теорему доведено.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови теореми 2 при $p\ge 1$. Тоді існують такі додатні сталі $\gamma_{p+1}<\gamma_p<...<\gamma_1$, $\mu<\dfrac{\gamma_1}{2p}$, досить мале $\varepsilon_0=\varepsilon_0(\gamma_1,...,\gamma_{p+1})$ і досить великі $\underline{K}_2,...,\underline{K}_{p+1}$, що для всіх $\tau\ge t\in R$, $t_0\in R$, $\psi\in R^m$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ і $1\le r\le p$ виконуються нерівності*

$$\left\|\frac{\partial^r}{\partial\varepsilon^r}\Omega_t^\tau(\psi,t_0,\varepsilon)\right\|\le\underline{K}_{r+1}\varepsilon^{\beta_1/2-2r}e^{-\gamma_{r+1}(\tau-t)+\mu r|t-t_0|}. \qquad (42)$$

Доведення. Скористаємось методом математичної індукції. У випадку $r=1$ оцінку (42) доведено в теоремі 2. Припустимо, що при $r=2,...,k-1$ виконується оцінка (42) і продиференціюємо рівність (20) k разів по ε.

Використаємо далі оцінку, отриману у теоремі 3.2 роботи [6]:

$$\left\|\frac{\partial^r}{\partial\varepsilon^r}Q_t^\tau(\varepsilon)\right\|\le\varepsilon^{-r}K^{r+1}\sigma_1\left(\frac{r}{\theta_1 e(\gamma-\gamma_1)}\right)^r e^{-\gamma_1(\tau-t)},\quad \gamma_1<\gamma,\quad r=\overline{1,k}. \qquad (43)$$

При доведенні (42) також потрібно буде мати оцінки виразів

$$\frac{\partial^r}{\partial\varepsilon^r}A(\varphi_{t_0}^\xi,\xi),\quad \frac{\partial^r}{\partial\varepsilon^r}B(\varphi_{t_0}^\xi,\xi)$$

при $r=\overline{1,k}$. Для їх отримання застосуємо нерівності

$$\left\|\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\varphi_{t_0}^\xi(\psi,\varepsilon)\right\|\le\sigma_7(\mu)\varepsilon^{-2}e^{\mu|\xi-t_0|},\quad \left\|\frac{\partial^r}{\partial\varepsilon^r}\varphi_{t_0}^\xi(\psi,\varepsilon)\right\|\le\sigma_{8r}\varepsilon^{\frac{\beta_1}{2}-2r}e^{\mu r|\xi-t_0|},\quad 2\le r\le k, \qquad (45)$$

які доведені у лемі 3.

Для довільного $\tau > t$ з рівності (20) одержимо нерівність

$$\left\|\frac{\partial^k \Omega_t^\tau}{\partial \varepsilon^k}\right\| \leq \left\|\frac{\partial^k Q_t^\tau(\varepsilon)}{\partial \varepsilon^k}\right\| + \left\|\int\limits_t^\tau \frac{\partial^k Q_\xi^\tau}{\partial \varepsilon^k} A(\varphi_{t_0}^\xi, \xi)\Omega_t^\xi d\xi + \varepsilon \sum_{t \leq \tau_j < \tau} \frac{\partial^k Q_{\tau_j}^\tau}{\partial \varepsilon^k} B(\varphi_{t_0}^{\tau_j}, \tau_j)\Omega_t^{\tau_j}\right\| +$$

$$+ \left\|\int\limits_t^\tau Q_\xi^\tau \frac{\partial^k}{\partial \varepsilon^k} A(\varphi_{t_0}^\xi, \xi)\Omega_t^\xi d\xi + \varepsilon \sum_{t \leq \tau_j < \tau} Q_{\tau_j}^\tau \frac{\partial^k}{\partial \varepsilon^k} B(\varphi_{t_0}^{\tau_j}, \tau_j)\Omega_t^{\tau_j}\right\| +$$

$$+ \left\|\int\limits_t^\tau Q_\xi^\tau A(\varphi_{t_0}^\xi, \xi) \frac{\partial^k}{\partial \varepsilon^k}\Omega_t^\xi d\xi + \varepsilon \sum_{t \leq \tau_j < \tau} Q_{\tau_j}^\tau B(\varphi_{t_0}^{\tau_j}, \tau_j) \frac{\partial^k}{\partial \varepsilon^k}\Omega_t^{\tau_j}\right\| + C(\varepsilon). \qquad (46)$$

Зауважимо, що у нерівності (46) явно виписані лише ті вирази, в яких задіяні похідні k-го порядку по ε для матриць Q, Ω, A і B. Виразів, в яких задіяні похідні по ε до $k-1$-го порядку включно матриць Q, Ω, A і B, скінченне число (позначимо його через N), і вони оцінені сталою $C(\varepsilon)$.

Позначимо через $M_1, ..., M_5$ послідовно всі доданки правої частини нерівності (46). Для оцінки величини M_1 маємо нерівність (43) для $r = k$.

Враховуючи оцінку (43) при $r = k$, аналогічно як і при оцінюванні $D_2 + D_6$ в процесі доведення теореми 2, дістанемо, що

$$M_2 \leq \sigma_{17}\varepsilon^{-k}e^{-\gamma_2(\tau - t)}$$

з деякою додатною сталою σ_{17}.

Оцінимо далі M_3 і M_4. Оскільки похідна $\dfrac{\partial^k \varphi}{\partial \varepsilon^k}$ виражається через похідні першого порядку $\partial\varphi_j/\partial\varepsilon, j = \overline{1, m}$, і через похідні до $k-1$-го порядку включно, оцінки яких вже відомі, то з (45) випливає, що найбільший порядок росту при $\varepsilon \to 0$ в порівнянні з $\dfrac{1}{\varepsilon}$ мають вирази

$$\frac{\partial^k A}{\partial\varphi_1^{\zeta_1}...\partial\varphi_m^{\zeta_m}}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varepsilon}\right)^{\zeta_1}...\left(\frac{\partial\varphi_m}{\partial\varepsilon}\right)^{\zeta_m}, \quad \frac{\partial^k B}{\partial\varphi_1^{\zeta_1}...\partial\varphi_m^{\zeta_m}}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varepsilon}\right)^{\zeta_1}...\left(\frac{\partial\varphi_m}{\partial\varepsilon}\right)^{\zeta_m},$$

де

$$\zeta_1 + ... + \zeta_m = k.$$

З першої нерівності в (45) маємо, що

$$\left\|\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varepsilon}\right)^{\zeta_1}...\left(\frac{\partial\varphi_m}{\partial\varepsilon}\right)^{\zeta_m}\right\| \leq \sigma_7^k\varepsilon^{-2k}e^{k\mu|\xi - t_0|}.$$

Отже, використовуючи лему 2, одержимо оцінки

$$M_3 \leq \sigma_{18}(\varepsilon) = \sigma_{19}\varepsilon^{\beta_1/2}\varepsilon^{-2k}e^{-(\gamma_k - k\mu)(\tau - t) + k\mu|t - t_0|},$$

$$M_4 \leq \sigma_{18}(\varepsilon) + \sigma_{20}\varepsilon^{\beta_1/2}\left(\int\limits_t^\tau e^{-\gamma(\tau - y)}\left\|\frac{\partial^k\Omega_t^y}{\partial\varepsilon^k}\right\|dy + \varepsilon\sum_{t \leq \tau_j < \tau}e^{-\gamma(\tau - \tau_j)}\left\|\frac{\partial^k\Omega_t^{\tau_j}}{\partial\varepsilon^k}\right\|\right),$$

в яких σ_{19} і σ_{20} – сталі, не залежні від ε. Зазначимо, що саме M_3 і M_4 дають найбільший порядок росту при $\varepsilon \to 0$ в порівнянні з $\frac{1}{\varepsilon}$.

Легко показати, що $M_5 \equiv C(\varepsilon)$ задовольняє нерівність

$$M_5 \leq K \cdot \underline{K}_k \cdot N \cdot \sigma_{18}(\varepsilon).$$

Підставимо оцінки доданків $M_1, ..., M_5$ в (46) і, розв'язавши інтегро-сумарну нерівність, дістанемо оцінку (42). Теорему доведено.

Зауваження. У випадку рівномірних моментів імпульсної дії, тобто $\theta(\tau) \equiv \theta_1, \tau \in R$, від нерівності $\|\omega'(\tau)\| \leq \sigma_1$ можна відмовитись. При цьому всі результати даної статті залишаються вірними при $\beta_1 = 1/(l+1)$.

1. *Петришин Р. І., Сопронюк Т.М.* Експоненціальна оцінка фундаментальної матриці лінійної імпульсної системи // Укр. мат. журн. – 2001.– **53**, №8. – С. 1101–1108.
2. *Самойленко А.М., Петришин Р.І.* Математичні аспекти теорії нелінійних коливань.— К.: Наукова думка, 2004.— 474 с.
3. *Петришин Р. І., Сопронюк Т.М.* Усереднення початкової та крайової задач для одного класу коливних імпульсних систем // Нелінійні коливання. – 2006.– **9**, №1. – С.68–84.
4. *Петришин Р.І., Сопронюк Т. М.* Про фундаментальну матрицю лінійної системи із швидкоосцилюючими коефіцієнтами // Нелінійні коливання. – 2000.— **3**, №4. –С.497–504.
5. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием.— К.: Вища школа, 1987.— 288 с.
6. *Петришин Р.І., Сопронюк Т. М.* Наближені методи розв'язування диференціальних рівнянь з імпульсною дією: навч. посібник. — Чернівці: Чернівецький національний ун-т, 2010. — 200 с.

Одержано 18.06.2010

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРІВ

При підготовці рукопису необхідно дотримуватися таких правил:

1) Стаття повинна містити короткий вступ, постановку задачі та формулювання одержаних автором нових результатів і повне їх доведення. Не допускається робити великі огляди вже опублікованих статей і результатів, переказувати відомі факти, наводити формулювання опублікованих теорем, лем, посилання на неопубліковані роботи.
2) Рукопис повинен бути надрукований за допомогою комп'ютера на аркушах формату A4 (з одного боку). Об'єм статті не повинен перевищувати 15 сторінок.
3) Рукопис подається у двох екземплярах, а також електронною копією у вигляді LaTeX-файлу (див. пункт 4). Мова, якою оформляється стаття, повинна бути українською, англійською або російською. Перша сторінка оформляється таким чином:
   УДК №
   Ініціали, прізвище автора, офіційна назва установи, де працює автор
   Назва роботи
   Текст анотації англійською мовою.
   Текст анотації українською мовою.
   Текст статті.
4) Вимоги до набору:
   а) програма набору — LaTeX2ε;
   б) стильовий файл набору — Uzhgorod-Mathematical-Paper.cls (його можна одержати електронною поштою; звертатись у редколегію журналу за адресою algebra@tn.uz.ua)
   в) обов'язковий аргумент команд \label{...} і \cite{...} повинен містити прізвище першого автора статті латиницею (наприклад \label{IvanenkoEqaution1}).
5) Формули, які нумеруються, обов'язково виключати в окремий рядок. Нумерувати тільки ті формули, на які є посилання.
6) Використана література подається загальним списком (у порядку посилань на джерела в тексті статті). Зразки бібліографічного опису книги, статті, депонованого рукопису, тезисів доповідей конференцій:

   1. *Холл М.* Теория групп. – М.: Из-во иностр. лит., 1962. – 468 с.
   2. *Іванчук І. І.* Назва // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, №2. – С. 274–278.
   3. *Петравчук П. П., Іванчук І. І.* Назва // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2009. – Вип. 19. – С. 94–109.
   4. *Можаев В. М.* Название. – М., 1981. – 17 с. – Деп. в ВИНИТИ, №8884.
   5. *Карпенко С. М.* Назва // Чисельні методи і застосування: Тез. допов. конф. (Київ, 27 серп.–2 вер. 1997 р.). – Київ, 1997. – С. 21–22.

7) Рукопис слід старанно вичитати.
8) Рукописи, оформлені без дотримання зазначених правил, розглядатися редакцією не будуть.

Науковий вісник Ужгородського університету

Серія математика і інформатика

Випуск 20

Підписано до друку 29.10.2010. Формат 60×84/8. Друк офсетний.
Умов. друк. арк. . Замовлення № .
Тираж .

Видавництво УжНУ "Говерла"
м. Ужгород, вул. Капітульна, 18.
Тел.: (0312) 233248.

Свідоцтво про внесення до державного реєстру видавців, виготівників і
розповсюджувачів видавничої продукції — Серія Зт №32.