УДК 517.928

А.М. Самойленко, Р.І. Петришин, Т.М. Сопронюк
A.M. Samoilenko, R.I. Petryshyn, T.M. Sopronyuk

Інститут математики НАН України,
Україна, 01601, Київ, вул. Терещенківська, 3

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
Україна, 58012, Чернівці, вул. Коцюбинського, 2

ПОБУДОВА ІНТЕГРАЛЬНОГО МНОГОВИДУ БАГАТОЧАСТОТНОЇ КОЛИВНОЇ СИСТЕМИ З ФІКСОВАНИМИ МОМЕНТАМИ ІМПУЛЬСНОЇ ДІЇ

STRUCTURING OF INTEGRATED MANIFOLD OF MULTIFREQUENCY OSCILLATORY SYSTEM WITH FIXED MOMENTS OF IMPULSE INFLUENCE

Визначено деякий клас багаточастотних резонансних систем з імпульсною дією, для якого існує інтегральний многовид. Побудовано функцію, яка визначає розривний інтегральний многовид, і досліджено її властивості.

We have determined a class of multifrequency resonant systems with pulse influence for which the integrated manifold exists. We have built the function which determines the interrupted integrated manifold and investigated its properties.

Якісне дослідження розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь істотно спрощується, якщо вони лежать на інтегральному многовиді меншого розміру, ніж початковий фазовий простір, тому вивчення умов існування таких многовидів є актуальним. Фундаментальні ідеї М.М. Боголюбова [1] про інтегральні многовиди тороїдального типу дістали поширення в роботах багатьох математиків на диференціальні рівняння в різних функціональних просторах, в тому числі і на імпульсні коливні системи зі сталими частотами [2,3]. В даній статті аналогічне питання вивчається для нелінійних багаточастотних систем з імпульсною дією у фіксовані моменти часу. Такого типу системи виникають при переході до амплітудно-фазових змінних в рівняннях руху слабко зв'язаних осциляторів з повільно змінними частотами під дією імпульсних сил. Тут використано розвинуту в [4] методику побудови інтегрального многовиду для багаточастотних резонансних систем без імпульсної дії та рівномірні оцінки осциляційних інтегралів і сум від розривних функцій, досліджені в роботах [5-7].

Розгядається багаточастотна система $n+m$ рівнянь з імпульсною дією у фіксовані моменти часу $t_\nu = \varepsilon^{-1}\tau_\nu$ вигляду

$$\frac{dx}{d\tau} = a(x,\tau) + \tilde{a}(x,\varphi,\tau) + \varepsilon A(x,\varphi,\tau,\varepsilon), \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + b(x,\varphi,\tau,\varepsilon), \quad \tau \neq \tau_\nu,$$
$$\Delta x|_{\tau=\tau_\nu} = \varepsilon p(x,\tau_\nu) + \varepsilon\tilde{p}(x,\varphi,\tau_\nu) + \varepsilon^2 P(x,\varphi,\tau_\nu,\varepsilon), \quad \Delta\varphi|_{\tau=\tau_\nu} = \varepsilon q(x,\varphi,\tau_\nu,\varepsilon), \tag{1}$$

в якій $x \in \mathcal{D} \subset R^n, \varphi \in R^m, (0,\varepsilon_0] \ni \varepsilon$ – малий параметр, $\tau = \varepsilon t \in R$ – "повільний час $\tau_{\nu+1} - \tau_\nu = \theta\varepsilon$ для всіх $\nu \in Z, Z$ – множина всіх цілих чисел, θ – додатна стала, $\mathcal{D}$ – обмежена область, функці ї $a, \tilde{a}, p, \tilde{p}, q, A, P, \omega$ і b визначені на множині $\bar{G} = \mathcal{D} \times R^m \times R \times (0,\varepsilon_0]$, 2π- періодичні по кожній компоненті $\varphi_\nu, \nu = \overline{1,m}$, вектора φ і належать певним класам гладких функцій.

Оскільки середні по φ в кубі періодів функцій $\tilde{a}(x,\varphi,\tau), \tilde{p}(x,\varphi,\tau)$ можна віднести відповідно до функцій $a(x,\tau), p(x,\tau)$, то будемо вважати їх тотожно рівним нулю.

Позначимо через $W_l(\tau)$ і $W_l^*(\tau)$ відповідно $l \times m$-матрицю $W_l(\tau) = \left(\frac{d^j}{d\tau^j}\omega_\nu(\tau)\right)_{j,\nu=1}^{l,m}$ і транспоновану матрицю. Припустимо, що функції $\frac{d^j}{d\tau^j}\omega_\nu(\tau), \nu = \overline{1,m}, j = \overline{0,l}, l \geq m$, рівномірно неперервні на R і

$$\|(W_l^*(\tau)W_l(\tau))^{-1}W_l^*(\tau)\| \leq \sigma_1 = \text{const} \quad \forall\tau \in R. \tag{2}$$

Накладемо наступні обмеження:

$$[a, \tilde{a}, p, \tilde{p}, A, b, q] \in C^1_{x,\varphi,\tau}(\bar{G}, \sigma_1),$$
$$\sum_k [\|k\|^3 \sup_{\bar{G}} \|r_k\| + \|k\|^2 (\sup_{\bar{G}} \|\frac{\partial r_k}{\partial \tau}\| + \sup_{\bar{G}} \|\frac{\partial r_k}{\partial x}\|)] \leq \sigma_1,$$
$$\sum_k [\|k\| \sup_{\bar{G}} \|c_k\| + \sup_{\bar{G}} \|\frac{\partial c_k}{\partial \tau}\| + \sup_{\bar{G}} \|\frac{\partial c_k}{\partial x}\|] \leq \sigma_1, \tag{3}$$

матриця $S(x,\tau) = \frac{\partial}{\partial x}(a(x,\tau), p(x,\tau))$ одностайно по $\tau \in R$ рівномірно неперервна по $x \in \mathcal{D}$. Останнє означає, що для довільного $\delta_1 > 0$ існує таке $\delta_2 = \delta_2(\delta_1) > 0$, незалежне від x, τ, що

$$\|S(x,\tau) - S(y,\tau)\| < \delta_1 \quad \forall x \in \mathcal{D}, y \in \mathcal{D}, \tau \in R$$

при $\|x - y\| < \delta_2$.

Зазначимо, що в умовах (3) $C^1_z(\bar{G}, \sigma_1)$– множина вектор- функцій, які при кожному фіксованому $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ мають неперервні і обмежені в

$\bar{G}$ деякою додатною сталою σ_1 частинні похідні по z першого порядку; $c_k = c_k(x,\tau,\varepsilon), r_k = r_k(x,\tau,\varepsilon)$ - коефіцієнти Фур'є відповідно функцій $c(x,\varphi,\tau,\varepsilon) = [\tilde{a}(x,\varphi,\tau); b(x,\varphi,\tau,\varepsilon)], r(x,\varphi,\tau,\varepsilon) = [\tilde{p}(x,\varphi,\tau); q(x,\varphi,\tau,\varepsilon)]$; $k = (k_1,...,k_m)$ – вектор з цілочисловими координатами. Під нормою матриці розуміємо суму модулів її елементів.

Припустимо, що існує визначений для всіх $(\tau,\varepsilon) \in R \times (0,\varepsilon_0]$ розв'язок $\bar{x} = \bar{x}(\tau,\varepsilon)$ системи першого наближення для повільних змінних

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau} = a(\bar{x},\tau), \quad \tau \neq \tau_\nu,$$
$$\Delta\bar{x}|_{\tau=\tau_\nu} = \varepsilon p(\bar{x},\tau_\nu), \tag{4}$$

який лежить в $\mathcal{D}$ разом із своїм ρ-околом, $\rho = \mathrm{const} > 0$, а відповідна цьому розв'язку система рівнянь у варіаціях

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{\partial}{\partial x}a(\bar{x}(\tau,\varepsilon),\tau)z, \quad \tau \neq \tau_\nu,$$
$$\Delta z|_{\tau=\tau_\nu} = \varepsilon\frac{\partial}{\partial x}p(\bar{x}(\tau_\nu,\varepsilon),\tau_\nu)z$$

гіперболічна рівномірно по $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$. Не втрачаючи загальності, будемо припускати, що матриці

$$H(\tau,\varepsilon) \equiv \frac{\partial a(\bar{x}(\tau,\varepsilon),\tau)}{\partial x}, \quad G(\tau,\varepsilon) \equiv \frac{\partial p(\bar{x}(\tau,\varepsilon),\tau)}{\partial x}$$

мають блочно діагональну структуру, тоді останню систему можна подати у вигляді

$$\frac{dz_+}{d\tau} = H_+(\tau,\varepsilon)z_+, \ \tau \neq \tau_\nu, \quad \Delta z_+|_{\tau=\tau_\nu} = \varepsilon G_+(\tau_\nu,\varepsilon)z_+, \tag{4.1}$$
$$\frac{dz_-}{d\tau} = H_-(\tau,\varepsilon)z_-, \ \tau \neq \tau_\nu, \quad \Delta z_-|_{\tau=\tau_\nu} = \varepsilon G_-(\tau_\nu,\varepsilon)z_-, \tag{4.2}$$

де $z = (z_+; z_-), z_+ \in R^{n_0}, z_- \in R^{n-n_0}$, n_0 не залежить від ε, $H(\tau,\varepsilon) = \mathrm{diag}\,[H_+(\tau,\varepsilon), H_-(\tau,\varepsilon)], G(\tau,\varepsilon) = \mathrm{diag}\,[G_+(\tau,\varepsilon), G_-(\tau,\varepsilon)]$. На підставі гіперболічності матриціанти $Q_+(\tau,t,\varepsilon)$ і $Q_-(\tau,t,\varepsilon)$ лінійних систем відповідно (4.1) і (4.2) для всіх $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ справджують нерівності

$$\|Q_+(\tau,t,\varepsilon)\| \leq Ke^{\gamma(\tau-t)} \quad \forall\tau \leq t, \quad \|Q_-(\tau,t,\varepsilon)\| \leq Ke^{-\gamma(\tau-t)} \quad \forall\tau \geq t$$

з деякими сталими $K \geq 1$ і $\gamma > 0$, незалежними від ε.

Нехай

$$Q(\tau,t,\varepsilon)=\begin{cases} -\mathrm{diag}\ (Q_+(\tau,t,\varepsilon);0), & \tau\le t,\\ \mathrm{diag}\ (0;Q_-(\tau,t,\varepsilon)), & \tau>t.\end{cases}$$

Тоді очевидно, що

$$\|Q(\tau,t,\varepsilon)\|\le Ke^{-\gamma|\tau-t|},\quad \tau\in R, t\in R, \varepsilon\in(0,\varepsilon_0]. \tag{5}$$

В нових змінних $y=x-\bar{x}(\tau,\varepsilon), y=(y_+;y_-)$ система (1) набуде вигляду

$$\begin{gathered}
\frac{dy_+}{d\tau}=H_+(\tau,\varepsilon)y_++F_+(y,\tau,\varepsilon)+\tilde{a}_+(y+\bar{x}(\tau,\varepsilon),\varphi,\tau)+\\
+\varepsilon A_+(y+\bar{x}(\tau,\varepsilon),\varphi,\tau,\varepsilon),\quad \tau\ne\tau_\nu,\\
\frac{dy_-}{d\tau}=H_-(\tau,\varepsilon)y_-+F_-(y,\tau,\varepsilon)+\tilde{a}_-(y+\bar{x}(\tau,\varepsilon),\varphi,\tau)+\\
+\varepsilon A_-(y+\bar{x}(\tau,\varepsilon),\varphi,\tau,\varepsilon),\quad \tau\ne\tau_\nu,\\
\frac{d\varphi}{d\tau}=\frac{\omega(\tau)}{\varepsilon}+b(y+\bar{x}(\tau,\varepsilon),\varphi,\tau,\varepsilon),\quad \tau\ne\tau_\nu,\\
\Delta y_+|_{\tau=\tau_\nu}=\varepsilon G_+(\tau_\nu,\varepsilon)y_++\varepsilon\Phi_+(y,\tau_\nu,\varepsilon)+\\
+\varepsilon\tilde{p}_+(y+\bar{x}(\tau_\nu,\varepsilon),\varphi,\tau_\nu)+\varepsilon^2P_+(y+\bar{x}(\tau_\nu,\varepsilon),\varphi,\tau_\nu,\varepsilon),\\
\Delta y_-|_{\tau=\tau_\nu}=\varepsilon G_-(\tau_\nu,\varepsilon)y_-+\varepsilon\Phi_-(y,\tau_\nu,\varepsilon)+\\
+\varepsilon\tilde{p}_-(y+\bar{x}(\tau_\nu,\varepsilon),\varphi,\tau_\nu)+\varepsilon^2P_-(y+\bar{x}(\tau_\nu,\varepsilon),\varphi,\tau_\nu,\varepsilon),\\
\Delta\varphi|_{\tau=\tau_\nu}=\varepsilon q(y+\bar{x}(\tau_\nu,\varepsilon),\varphi,\tau_\nu,\varepsilon),
\end{gathered} \tag{6}$$

де

$$\begin{gathered}
(\tilde{a}_+;\tilde{a}_-)=\tilde{a},\quad (\tilde{p}_+;\tilde{p}_-)=\tilde{p},\quad (A_+;A_-)=A,\quad (P_+;P_-)=P,\\
F=(F_+;F_-)=a(y+\bar{x}(\tau,\varepsilon),\tau)-a(\bar{x}(\tau,\varepsilon),\tau)-H(\tau,\varepsilon)y=\\
=\int_0^1[\frac{\partial}{\partial x}\,(a(ly+\bar{x}(\tau,\varepsilon),\tau)-a(\bar{x}(\tau,\varepsilon),\tau))]dly,\\
\Phi=(\Phi_+;\Phi_-)=p(y+\bar{x}(\tau,\varepsilon),\tau)-p(\bar{x}(\tau,\varepsilon),\tau)-G(\tau,\varepsilon)y=\\
=\int_0^1[\frac{\partial}{\partial x}\,(p(ly+\bar{x}(\tau,\varepsilon),\tau)-p(\bar{x}(\tau,\varepsilon),\tau))]dly.
\end{gathered}$$

При зроблених на $a(x,\tau)$ і $b(x,\tau)$ припущеннях маємо, що для довільного δ_1 можна вибрати таке $\delta_2<\rho$, що

$$\|\Phi\|<\delta_1\|y\|,\quad \|F\|<\delta_1\|y\|,\quad \|\frac{\partial\Phi}{\partial y}\|<\delta_1,\quad \|\frac{\partial F}{\partial y}\|<\delta_1 \tag{7}$$

при $\|y\| < \delta_2, \tau \in R$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

В статті [1] доведено існування інтегрального многовиду $y = Y(\psi, \tau, \varepsilon)$ системи (6) . Причому інтегральний многовид будується ітераційним методом, який полягає в тому, що $y = Y(\psi, \tau, \varepsilon)$ визначається як границя послідовності $\{Y_j(\psi, \tau, \varepsilon)\}$, в якій $y = Y_{j+1}(\psi, \tau, \varepsilon)$ є інтегральним многовидом системи рівнянь з імпульсною дією

$$\frac{dy}{d\tau} = H(\tau, \varepsilon)y + F_1(Y_j(\varphi, \tau, \varepsilon), \varphi, \tau, \varepsilon), \quad \tau \neq \tau_\nu,$$

$$\Delta y|_{\tau=\tau_\nu} = \varepsilon G(\tau_\nu, \varepsilon)y + \varepsilon\Phi_1(Y_j(\varphi, \tau_\nu, \varepsilon), \varphi, \tau_\nu, \varepsilon), \tag{8}$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + b(\bar{x}(\tau, \varepsilon) + Y_j(\varphi, \tau, \varepsilon), \varphi, \tau, \varepsilon), \quad \tau \neq \tau_\nu,$$

$$\Delta\varphi|_{\tau=\tau_\nu} = \varepsilon q(\bar{x}(\tau_\nu, \varepsilon) + Y_j(\varphi, \tau_\nu, \varepsilon), \varphi, \tau_\nu, \varepsilon), \tag{9}$$

де

$$F_1(y, \varphi, \tau, \varepsilon) = F(y, \tau, \varepsilon) + \tilde{a}(\bar{x}(\tau, \varepsilon) + y, \varphi, \tau) + \varepsilon A(\bar{x}(\tau, \varepsilon) + y, \varphi, \tau, \varepsilon),$$

$$\Phi_1(y, \varphi, \tau, \varepsilon) = \Phi(y, \tau, \varepsilon) + \tilde{p}(\bar{x}(\tau, \varepsilon) + y, \varphi, \tau) + \varepsilon P(\bar{x}(\tau, \varepsilon) + y, \varphi, \tau, \varepsilon), \quad Y_0 \equiv 0.$$

Нехай

$$\sigma_0 = \bar{\sigma}_0 + \underline{\sigma}_0 < 1, \tag{10}$$

де

$$\bar{\sigma}_0 = \frac{2}{\gamma} K \sup_{\varphi,\tau,x} \|\frac{\partial}{\partial x}\tilde{a}(x, \varphi, \tau)\|, \quad \underline{\sigma}_0 = \frac{2K}{\gamma\theta} \sup_{\varphi,\tau,x} \|\frac{\partial}{\partial x}\tilde{p}(x, \varphi, \tau)\|$$

При виконанні умов (2),(3),(5) і (10) в статті [1] доведено існування інтегрального многовиду системи (1), який лежить в деякому $d_1\varepsilon^\alpha$-околі кривої $x = \bar{x}(\tau, \varepsilon)$ для всіх $(\psi, \tau, \varepsilon) \in\in R^m \times R \times (0, \varepsilon_0] = G_1$ і визначається формулою

$$X(\psi, \tau, \varepsilon) = \bar{x}(\tau, \varepsilon) + Y(\psi, \tau, \varepsilon),$$

де

$$Y(\psi, \tau, \varepsilon) = \lim_{j\to\infty} Y_j(\psi, \tau, \varepsilon), \tag{11}$$

$$Y_{j+1}(\psi, \tau, \varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} Q(\tau, t, \varepsilon)F_1(Y_j(\varphi^t_{\tau,j}(\psi, \varepsilon), t, \varepsilon), \varphi^t_{\tau,j}(\psi, \varepsilon), t, \varepsilon)dt+$$

$$+\varepsilon \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} Q(\tau, \tau_\nu, \varepsilon)\Phi_1(Y_j(\varphi^{\tau_\nu}_{\tau,j}(\psi, \varepsilon), \tau_\nu, \varepsilon), \varphi^{\tau_\nu}_{\tau,j}(\psi, \varepsilon), \tau_\nu, \varepsilon). \tag{12}$$

$$d_1 = \text{const}\ , \alpha = \frac{1}{l+1}.$$

2. Допоміжні твердження. Для дослідження збіжності послідовностей $\{Y_j\}$ і $\{\varphi^t_{\tau,j}\}$ встановимо ряд лем.

Позначимо через $\varphi = \varphi^t_\tau(\psi, \varepsilon)$ розв'язок задачі Коші

$$\frac{d\varphi^t_\tau}{dt} = \frac{\omega(t)}{\varepsilon} + b(\bar{x}(t,\varepsilon) + Y(\varphi^t_\tau, t, \varepsilon), \varphi^t_\tau, t, \varepsilon), \quad t \neq \tau_\nu,$$

$$\Delta\varphi|_{t=\tau_\nu} = \varepsilon q(\bar{x}(\tau_\nu, \varepsilon) + Y(\varphi^{\tau_\nu}_\tau, \tau_\nu, \varepsilon), \varphi^{\tau_\nu}_\tau, \tau_\nu, \varepsilon), \quad \varphi^\tau_\tau = \psi \in R^m. \tag{11}$$

Тут $Y(\varphi, t, \varepsilon)$ - неперервно диференційовна по $(\varphi, t) \in R^m \times \bar{R}$ при кожному фіксованому ε. Дослідимо властивості цього розв'язку.

Лема 1. *Нехай виконуються умови (2),(3),(5) і нерівності*

$$\|\frac{\partial Y(\psi,\tau,\varepsilon)}{\partial \psi}\| \leq d_2 \varepsilon^\alpha, \quad (\psi, \tau, \varepsilon) \in G_1,$$

$$\|\frac{\partial Y(\psi,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau} + \frac{\partial Y(\psi,\tau,\varepsilon)}{\partial \psi}\frac{\omega(\tau)}{\varepsilon}\| \leq \bar{d}_1, \quad (\psi, \tau, \varepsilon) \in \underline{G}_1,$$

$$\|\Delta Y(\psi, \tau, \varepsilon)|_{\tau=\tau_\nu}\| \leq \underline{d}_1 \varepsilon, \quad (\psi, \varepsilon) \in R^m \times (0, \varepsilon_0], \nu \in Z,$$

$$\underline{d}_1, \bar{d}_1, d_2 = const\ , \alpha = \frac{1}{l+1}.$$

Тоді існують такі незалежні від ε сталі $c_r = c_r(\underline{d}_1, \bar{d}_1), r = 1, 2,$ що при досить малому $\varepsilon_0 > 0$ для всіх $(\psi, t, \varepsilon) \in G_1$ справджуються оцінки

$$\|\frac{\partial}{\partial \psi}(\varphi^t_\tau(\psi, \varepsilon) - \psi)\| \leq c_1 \varepsilon^\alpha (1 + d_2) e^{\frac{\gamma}{3}|\tau - t|}, \quad \tau \in R, \tag{12}$$

$$\|\frac{\partial}{\partial \tau}\varphi^t_\tau(\psi, \varepsilon)\| \leq c_2 \left(1 + \frac{\|\omega(\tau)\|}{\varepsilon}\right) e^{\frac{\gamma}{3}|\tau - t|}, \quad \tau \in \bar{R}, \tag{13}$$

Доведення. Використаємо схему доведення леми 12.1 з [4]. Задача Коші (11) при $t \geq \tau$ веде до рівностей

$$\varphi^t_\tau - \psi = \int\limits_\tau^t [\frac{\omega(l)}{\varepsilon} + b(\bar{x}(l,\varepsilon) + Y(\varphi^l_\tau, l, \varepsilon), \varphi^l_\tau, l, \varepsilon)]dl +$$

$$+\varepsilon \sum_{\tau \leq \tau_\nu < t} q(\bar{x}(\tau_\nu, \varepsilon) + Y(\varphi^{\tau_\nu}_\tau, \tau_\nu, \varepsilon), \varphi^{\tau_\nu}_\tau, \tau_\nu, \varepsilon), \tag{14}$$

$$z_\tau^t = \int\limits_\tau^t \frac{\partial b}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial \varphi}(z_\tau^l + E)dl + \int\limits_\tau^t \frac{\partial b}{\partial \varphi}(z_\tau^l + E)dl +$$

$$+\varepsilon \sum_{\tau \le \tau_\nu < t} \frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial \varphi}(z_\tau^{\tau_\nu} + E) + \varepsilon \sum_{\tau \le \tau_\nu < t} \frac{\partial q}{\partial \varphi}(z_\tau^{\tau_\nu} + E), \qquad (15)$$

де $z_\tau^t \equiv \frac{\partial}{\partial \psi}(\varphi_\tau^t - \psi)$, E – одинична матриця. Перейдемо до нових змінних

$$\bar{\theta}_\tau^t = \varphi_\tau^t - \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_\tau^t \omega(\xi)d\xi.$$

Тоді, враховуючи, що $\tau_{\nu+1} - \tau_\nu = \theta\varepsilon$, дістанемо нерівність

$$\|z_\tau^t\| \le \sigma_1 d_2 \varepsilon^\alpha \left(m(\tau - t)(1 + 1/\theta) + 1 + \int\limits_\tau^t \|z_\tau^l\| dl + \varepsilon \sum_{\tau \le \tau_\nu < t} \|z_\tau^{\tau_\nu}\| \right) +$$

$$+ \sum_{k \ne 0} \| \int\limits_\tau^t B_k(\bar{x}(l,\varepsilon) + Y(\varphi_\tau^l, l, \varepsilon), l, \varepsilon)(z_\tau^l + E)\exp\{i(k, \bar{\theta}_\tau^l)\} \times$$

$$\times \exp\{\frac{i}{\varepsilon}\int\limits_\tau^l (k, \omega(\xi))d\xi\} dl\| + \sum_{k \ne 0} \|\varepsilon \sum_{\tau \le \tau_\nu < t} Q_k(\bar{x}(\tau_\nu, \varepsilon) + Y(\varphi_\tau^{\tau_\nu}, \tau_\nu, \varepsilon), \tau_\nu, \varepsilon) \times$$

$$\times (z_\tau^{\tau_\nu} + E)\exp\{i(k, \bar{\theta}_\tau^{\tau_\nu})\}\exp\{\frac{i}{\varepsilon}\int\limits_\tau^{\tau_\nu}(k, \omega(\xi))d\xi\}\|. \qquad (16)$$

Тут $B_k(x, \tau, \varepsilon)$ і $Q_k(x, \tau, \varepsilon)$ - коефіцієнти Фур'є відповідно функцій $\dfrac{\partial}{\partial \varphi} b(x, \varphi, \tau, \varepsilon)$ і $\dfrac{\partial}{\partial \varphi} q(x, \varphi, \tau, \varepsilon)$.

Як і в [4,с.150], розглянемо спочатку випадок $t \ge \tau + 2$ і подамо відрізок $[\tau, t]$ у вигляді об'єднання відрізків

$$[\tau, t] = \bigcup_{s=0}^{q} T_s,$$

$$T_s = [\tau + s, \tau + s + 1], 0 \le s < q, \quad T_q = [\tau + q, t],$$

де q - ціла частина числа $t - \tau - 1$, а довжина відрізка T_q не менша одиниці і менша двох.

Оцінимо величини стрибків функцій $B_k(z_\tau^l + E)\exp\{i(k,\bar\theta_\tau^l)\}$ і $Q_k(z_\tau^l + E)\exp\{i(k,\bar\theta_\tau^l)\}$ в точках імпульсної дії на відрізку T_s:

$$\|\Delta\left(B_k(z_\tau^l+E)\exp\{i(k,\bar\theta_\tau^l)\}\right)|_{l=\tau_\nu}\| \le$$

$$\le 2(\sigma_1+\underline{d}_1)\varepsilon\left(\sup_{\bar G}\|B_k\| + \sup_{\bar G}\|\frac{\partial B_k}{\partial x}\|\right)(m+\sup_{T_s}\|z_\tau^l\|),$$

$$\|\Delta\left(Q_k(z_\tau^l+E)\exp\{i(k,\bar\theta_\tau^l)\}\right)|_{l=\tau_\nu}\| \le$$

$$\le 2(\sigma_1+\underline{d}_1)\varepsilon\left(\|k\|\sup_{\bar G}\|Q_k\| + \sup_{\bar G}\|\frac{\partial Q_k}{\partial x}\|\right)(m+\sup_{T_s}\|z_\tau^l\|)$$

при $d_2\varepsilon_0^\alpha \le 1$.

Оскільки при $l \ne \tau_\nu$ виконуються рівність

$$\frac{dz_\tau^l}{dl} = \left(\frac{\partial b}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial \varphi} + \frac{\partial b}{\partial \varphi}\right)(z_\tau^l + E)$$

і нерівність

$$\sup_{T_s}\|\frac{d}{dl}z_\tau^l\| \le 2\sigma_1(m+\sup_{T_s}\|z_\tau^l\|), \tag{17}$$

то на відрізках T_s одиничної довжини справджуються оцінки

$$I_k(T_s) \equiv \|\int\limits_{\tau+s}^{\tau+s+1} B_k(z_\tau^l+E)\exp\{i(k,\bar\theta_\tau^l)\}\exp\{\frac{i}{\varepsilon}\int\limits_\tau^l (k,\omega(\xi))d\xi\}dl\| \le$$

$$\le c_3\varepsilon^\alpha(1+\sup_{T_s}\|z_\tau^l\|)[\sup_{\bar G}\|B_k\| + \frac{1}{\|k\|}(\sup_{\bar G}\|\frac{\partial}{\partial\tau}B_k\| + \sup_{\bar G}\|\frac{\partial}{\partial x}B_k\|)],$$

$$S_k(T_s) \equiv \|\varepsilon\sum_{\tau+s\le\tau_\nu<\tau+s+1} Q_k(z_\tau^{\tau_\nu}+E)\exp\{i(k,\bar\theta_\tau^{\tau_\nu})\}\exp\{\frac{i}{\varepsilon}\int\limits_\tau^{\tau_\nu}(k,\omega(\xi))d\xi\}\| \le$$

$$\le c_3\varepsilon^\alpha(1+\sup_{T_s}\|z_\tau^l\|)[\|k\|^2\sup_{\bar G}\|Q_k\| + \|k\|(\sup_{\bar G}\|\frac{\partial}{\partial\tau}Q_k\| + \sup_{\bar G}\|\frac{\partial}{\partial x}Q_k\|)]$$

при $d_2\varepsilon_0^\alpha \le 1$ з деякою сталою сталою $c_3 = c_3(\underline{d}_1, \bar d_1)$. Останні нерівності встановлені аналогічно, як і нерівності для $\Delta_{s,k}$ з [4,с.150] з тою різницею, що тут ми використали рівномірні оцінки осциляційних інтегралів та сум [7] для розривних функцій, які мають вигляд

$$\|\int\limits_{\bar t}^{\bar t+\tau}\Phi(y,\varepsilon)\exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int\limits_{\bar\tau}^{y}(k,\omega(z))dz\right\}dy\| \le \tilde c_3(L)\varepsilon^{\frac{1}{l+1}}\left(\sup_{y\in[\bar t,\bar t+L]}\|\Phi(y,\varepsilon)\|+\right.$$

$$+\frac{1}{\|k\|}\sup_{\substack{y\in[\bar t,\bar t+L]\\ y\neq\tau_\nu}}\left\|\frac{\partial}{\partial y}\Phi(y,\varepsilon)\right\|+\frac{1}{\|k\|}\sum_{\bar t\le\bar\tau_\nu<\bar t+L}\|\Delta\Phi(y,\varepsilon)|_{y=\tau_\nu}\|\Bigg), \tag{18}$$

$$\|\varepsilon\sum_{\bar t\le\tau_\nu<\bar t+\tau}\Psi(\tau_\nu,\varepsilon)\exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int\limits_{\bar\tau}^{\tau_\nu}(k,\omega(z))dz\right\}\|\le$$

$$\le\tilde c_3(L)\|k\|\varepsilon^{\frac{1}{l+1}}\left(\sup_{[\bar t,\bar t+L]}\|\Psi(y,\varepsilon)\|+\sum_{\bar t\le\tau_\nu<\bar t+L}\|\Delta\Psi(y,\varepsilon)|_{y=\tau_\nu}\|+\bar L(\varepsilon)\right). \tag{19}$$

Тут матриця $\Phi(y,\varepsilon)$ для кожного фіксованого $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ неперервно диференційовна по $y\in[\bar t,\bar t+L]$ за виключенням точок τ_ν; на кожному півінтервалі $(\tau_\nu,\tau_{\nu+1}]$ матриця $\Psi(y,\varepsilon)$ задовольняє умову Ліпшиця по y зі сталою $\bar L(\varepsilon)$, незалежною від ν.

Для оцінки $\sup\limits_{T_s}\|z^l_\tau\|$ застосуємо, як і в [4,с.151], диференційовну норму

$$\|y\|_1=(\sum_{i,j=1}^m y_{ij}^2)^{\frac12}\le\|y\|\le m^2\|y\|_1,\quad |\frac{d}{dl}\|y\|_1|\le\|\frac{d}{dl}y\|_1,\quad y=y(l)=(y_{ij})_{i,j=1}^m.$$

Позначимо $m^2\|z^l_\tau\|_1$ через $u(l)$, а через $\bar q$ — кількість імпульсів $\tau_1,\tau_2,...,\tau_{\bar q}$ на відрізку T_s. Функція $u(l)$ – неперервно диференційовна на відрізку $[\tau+s,\tau+s+1]$ за винятком точок імпульсної дії та тих точок, де вона перетворюється в нуль. Якщо $u(\tau_0)=0$, то згідно з (14) $u(l)\le \underset{\sim}{c_3}$ для всіх $\tau\in[\tau+s,\tau+s+1]$, $\underset{\sim}{c_3}=\text{const}$. Тому вважатимемо, що $u(l)\not\equiv 0$ на T_s. Тоді при $\tau_1>\tau+s$ маємо

$$\sup_{T_s}u(l)=\sup_{T_s}u(l)-\inf_{T_s}u(l)+\inf_{T_s}u(l)\le$$

$$\le\sup_{[\tau+s,\tau_1]}u(l)-\inf_{[\tau+s,\tau_1]}u(l)+\sum_{\nu=1}^{\bar q-1}\left(\sup_{(\tau_\nu,\tau_{\nu+1}]}u(l)-\inf_{(\tau_\nu,\tau_{\nu+1}]}u(l)\right)+\sup_{(\tau_{\bar q},\tau+s+1]}u(l)-$$

$$-\inf_{(\tau_{\bar q},\tau+s+1]}u(l)+\sum_{\tau+s\le\tau_\nu<\tau+s+1}|\Delta u(l)|_{l=\tau_\nu}|+\int\limits_{\tau+s}^{\tau+s+1}u(l)dl.$$

З представлення (15) випливає оцінка

$$\|\Delta z^l_\tau|_{l=\tau_\nu}\|\le2\varepsilon\sigma_1\left(\|z^{\tau_\nu}_\tau\|+m\right),$$

яка з урахуванням нерівностей (17) і

$$\sup_{(\tau_\nu,\tau_{\nu+1}]} u(l) - \inf_{(\tau_\nu,\tau_{\nu+1}]} u(l) \leq \int\limits_{\tau_\nu}^{\tau_{\nu+1}} \left|\frac{du(l)}{dl}\right| dl$$

дозволяє встановити, що

$$\sup_{T_s} \|z_\tau^l\| \leq \underline{c}_3 \left(1 + \int\limits_{\tau+s}^{\tau+s+1} \|z_\tau^l\| dl + \varepsilon \sum_{\tau+s\leq\tau_\nu<\tau+s+1} \|z_\tau^{\tau_\nu}\| \right). \qquad (20)$$

Якщо ж $\tau_1 = \tau + s$, то із (15) дістанемо

$$\|z_\tau^{\tau_1}\| \leq \|(E+\varepsilon D)^{-1}\|(\|z_\tau^{\tau_1+0}\| + \|D\|\varepsilon), \quad D = \left(\frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial \varphi} + \frac{\partial q}{\partial \varphi}\right)|_{l=\tau_1},$$

звідки за рахунок малості $\varepsilon_0 > 0$ матимемо, що

$$\|z_\tau^{\tau_1}\| \leq 2\|z_\tau^{\tau_1+0}\| + 1 \leq 2 \sup_{(\tau+s,\tau+s+1]} \|z_\tau^l\| + 1.$$

Ці міркування підтверджують правильність оцінки вигляду (20) і при $\tau_1 = \tau + s$.

Отже на підставі (20) $I_k(T_s)$ та $S_k(T_s)$ можна оцінити наступним чином:

$$I_k(T_s) \leq \bar{c}_3\varepsilon^\alpha \left(1 + \int\limits_{\tau+s}^{\tau+s+1} \|z_\tau^l\| dl + \varepsilon \sum_{\tau+s\leq\tau_\nu<\tau+s+1} \|z_\tau^{\tau_\nu}\| \right) \times$$

$$\times[\|k\| \sup_{\bar{G}} \|b_k\| + \sup_{\bar{G}} \|\frac{\partial}{\partial \tau} b_k\| + \sup_{\bar{G}} \|\frac{\partial}{\partial x} b_k\|],$$

$$S_k(T_s) \leq \bar{c}_3\varepsilon^\alpha \left(1 + \int\limits_{\tau+s}^{\tau+s+1} \|z_\tau^l\| dl + \varepsilon \sum_{\tau+s\leq\tau_\nu<\tau+s+1} \|z_\tau^{\tau_\nu}\| \right) \times$$

$$\times[\|k\|^3 \sup_{\bar{G}} \|q_k\| + \|k\|^2 (\sup_{\bar{G}} \|\frac{\partial}{\partial \tau} q_k\| + \sup_{\bar{G}} \|\frac{\partial}{\partial x} q_k\|)] \qquad (21)$$

з деякою сталою $\bar{c}_3$ для всіх $s = \overline{0, \bar{q}-1}, k \neq 0$. Тут $b_k = b_k(x,\tau,\varepsilon)$ і $q_k = q_k(x,\tau,\varepsilon)$ - коефіцієнти Фур'є відповідно функцій $b(x,\varphi,\tau,\varepsilon)$ і $q(x,\varphi,\tau,\varepsilon)$.

З урахуванням умови $1 \leq t - q < 2$ оцінки вигляду (21) легко встановити і для $I_k(T_q)$ та $S_k(T_q)$.

Враховуючи нерівності (16),(21) і обмеження (3) на коефіцієнти Фур'є, при $t \geq \tau + 2$ дістанемо нерівність

$$\|z_\tau^t\| \leq \bar{c}_4 \varepsilon^\alpha (d_2 + 1) \left(t - \tau + 1 + \int\limits_\tau^t \|z_\tau^l\| dl + \varepsilon \sum_{\tau \leq \tau_\nu < t} \|z_\tau^{\tau_\nu}\| \right) \tag{22}$$

з деякою сталою $\bar{c}_4$. Якщо ж $t \in [\tau, \tau + 2)$, то без розбиття $[\tau, t]$ на частини із (15) на підставі розробленого вище методу для $\tau \leq t < \tau + 2$ отримаємо нерівність вигляду (22) зі сталою $\underline{c}_4$ замість $\bar{c}_4$. Покладемо $c_4 = \max\{\underline{c}_4, \bar{c}_4\}$. Тоді на підставі зростання по t функції $t - \tau + 1$ маємо нерівність

$$\frac{\|z_\tau^t\|}{t - \tau + 1} \leq c_4 (1 + d_2) \varepsilon^\alpha \left(1 + \int\limits_\tau^t \frac{\|z_\tau^l\|}{l - \tau + 1} dl + \varepsilon \sum_{\tau \leq \tau_\nu < t} \frac{\|z_\tau^{\tau_\nu}\|}{\tau_\nu - \tau + 1} \right),$$

яка з урахуванням умови $\tau_{\nu+1} - \tau_\nu = \theta\varepsilon$ і леми 2.1 [2,с.16] веде до оцінки

$$\|z_\tau^t\| \leq c_5 \varepsilon^\alpha (1 + d_2) e^{c_5 (1 + d_2) \varepsilon^\alpha (\tau - t)} (1 + \tau - t)$$

для всіх $t \geq \tau$. Виберемо ε_0 так, щоб $c_5(1 + d_2)\varepsilon_0^\alpha \leq \frac{\gamma}{6}$. Тоді для всіх $t \geq \tau, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ і $\psi \in R^m$ справедлива оцінка (12) зі сталою $c_1 = 6c_6/\gamma$. Для $t < \tau$ доведення оцінки аналогічне.

Диференцюючи рівність (15) по τ при $\tau \neq \tau_\nu$, маємо

$$\frac{\partial \varphi_\tau^t}{\partial \tau} = -\frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} - b(\bar{x}(\tau, \varepsilon) + Y(\psi, \tau, \varepsilon), \psi, \tau, \varepsilon) + \int\limits_\tau^t \left[\frac{\partial b}{\partial x} \frac{\partial Y}{\partial \varphi} + \frac{\partial b}{\partial \varphi} \right] \frac{\partial \varphi_\tau^l}{\partial \tau} dl +$$

$$+\varepsilon \sum_{\tau < \tau_\nu < t} \left[\frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial Y}{\partial \varphi} + \frac{\partial q}{\partial \varphi} \right] \frac{\partial \varphi_\tau^l}{\partial \tau} |_{l = \tau_\nu}.$$

Остання рівність по формі запису відрізняється від рівності (16) лише наявністю доданка $-\frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} - b(\bar{x}(\tau, \varepsilon) + Y(\psi, \tau, \varepsilon), \psi, \tau, \varepsilon)$. Якщо повторити схему доведення оцінки (12), то дістанемо нерівність (13), наявність в правій частині якої доданка $\|\omega(\tau)\|\varepsilon^{-1}$ обумовлена останнім зауваженням. Лему доведено.

Використовуючи оцінки осциляційних інтегралів (18) та сум (19) і метод доведення нерівності (20), легко обгрунтувати наступне твердження, в якому $f(y, \varepsilon)$ та $g(y, \varepsilon)$ – матриці таких розмірів, що визначений їх добуток $f(y, \varepsilon)g(y, \varepsilon)$.

Лема 2. *Якщо виконуються умови (2), (3) і матриці $f(y, \varepsilon), g(y, \varepsilon)$ неперервно диференційовні по $y \in R$ за виключенням точок розриву першого* *роду* $y=\tau_\nu$, *причому на кожному відрізку* $[\bar t,\bar t+T], R\ni\bar t$ *– довільне,* $0<T$ *– фіксоване, виконуються нерівності*

$$\|\Delta f(y,\varepsilon)|_{y=\tau_\nu}\|\le\varepsilon\|\tilde f(\bar t,T,\varepsilon)\|,\qquad \sup_{\substack{y\in[\bar t,\bar t+T]\\ y\neq\tau_\nu}}\left\|\frac{\partial}{\partial y}f(y,\varepsilon)\right\|<\infty,$$

$$\|\Delta g(y,\varepsilon)|_{y=\tau_\nu}\|\le\varepsilon\sigma_2(1+\sup_{y\in[\bar t,\bar t+T]}\|g(y,\varepsilon)\|),\qquad \sup_{y\in[\bar t,\bar t+T]}\|g(y,\varepsilon)\|<\infty,$$

$$\sup_{\substack{y\in[\bar t,\bar t+T]\\ y\neq\tau_\nu}}\left\|\frac{\partial}{\partial y}g(y,\varepsilon)\right\|\le\sigma_2(1+\sup_{y\in[\bar t,\bar t+T]}\|g(y,\varepsilon)\|),$$

то при досить малому $\varepsilon_0>0$ *для всіх* $\bar t\in R,\bar\tau\in R$, $\tau\in[0,T],\varepsilon\in(0,\varepsilon_0],k\neq 0$ *справедливі оцінки*

$$\|\int\limits_{\bar t}^{\bar t+\tau}f(y,\varepsilon)g(y,\varepsilon)\exp\{i(k,\bar\theta^{y}_{\bar\tau})\}\exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int\limits_{\bar\tau}^{y}(k,\omega(z))dz\right\}dy\|\le$$

$$\le\sigma_3\varepsilon^{\frac{1}{l+1}}\left(1+\int\limits_{\bar t}^{\bar t+\tau}\|g(y,\varepsilon)\|dy+\varepsilon\sum_{\bar t\le\tau_\nu<\bar t+\tau}\|g(\tau_\nu,\varepsilon)\|\right)\times$$

$$\times\left(\sup_{y\in[\bar t,\bar t+T]}\|f(y,\varepsilon)\|+\frac{1}{\|k\|}\sup_{\substack{y\in[\bar t,\bar t+T]\\ y\neq\tau_\nu}}\left\|\frac{\partial}{\partial y}f(y,\varepsilon)\right\|+\frac{1}{\|k\|}\|\tilde f(\bar t,T,\varepsilon)\|\right),\tag{23}$$

$$\|\varepsilon\sum_{\bar t\le\tau_\nu<\bar t+\tau}f(\tau_\nu,\varepsilon)g(\tau_\nu,\varepsilon)\exp\{i(k,\bar\theta^{\tau_\nu}_{\bar\tau})\}\exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int\limits_{\bar\tau}^{\tau_\nu}(k,\omega(z))dz\right\}\|\le$$

$$\le\sigma_4\varepsilon^{\frac{1}{l+1}}\left(1+\int\limits_{\bar t}^{\bar t+\tau}\|g(y,\varepsilon)\|dy+\varepsilon\sum_{\bar t\le\tau_\nu<\bar t+\tau}\|g(\tau_\nu,\varepsilon)\|\right)\times$$

$$\times\left(\|k\|^2\sup_{y\in[\bar t,\bar t+T]}\|f(y,\varepsilon)\|+\|k\|\sup_{\substack{y\in[\bar t,\bar t+T]\\ y\neq\tau_\nu}}\left\|\frac{\partial f(y,\varepsilon)}{\partial y}\right\|+\|k\|\|\tilde f(\bar t,T,\varepsilon)\|\right)\tag{24}$$

зі сталими σ_3,σ_4, *які залежать від* T, *але не залежать від* $\varepsilon,\bar\tau,\bar t$ *і* k.

Наступна лема буде використана при дослідженні збіжності відстаней між елементами послідовності $\left\{\varphi^t_{\tau,j}\right\}_{j=0}^{\infty}$. Тут $\varphi^t_{\tau,j}(\psi,\varepsilon)$ – розв'язок задачі Коші

$$\frac{d}{dt}\varphi^t_{\tau,j}(\psi,\varepsilon)=\frac{\omega(t)}{\varepsilon}+b(\bar{x}(t,\varepsilon)+Y_j(\varphi^t_{\tau,j}(\psi,\varepsilon),t,\varepsilon),\varphi^t_{\tau,j}(\psi,\varepsilon),t,\varepsilon),\quad t\neq\tau_\nu,$$

$$\Delta\varphi^t_{\tau,j}|_{t=\tau_\nu}=\varepsilon q(\bar{x}(\tau_\nu,\varepsilon)+Y_j(\varphi^{\tau_\nu}_{\tau,j},\tau_\nu,\varepsilon),\varphi^{\tau_\nu}_{\tau,j},\tau_\nu),\quad \varphi^\tau_{\tau,j}(\psi,\varepsilon)=\psi. \tag{25}$$

Позначимо через $\varphi^{t,1}_\tau(\psi,\varepsilon)$ і $\varphi^{t,2}_\tau(\psi,\varepsilon)$ два довільні послідовні елементи послідовності $\left\{\varphi^t_{\tau,j}\right\}_{j=0}^{\infty}$, а через $Y^1(\psi,\tau,\varepsilon)$ і $Y^2(\psi,\tau,\varepsilon)$ – відповідні їм елементи послідовності $\{Y_j\}_{j=0}^{\infty}$ з задачі Коші (25).

Лема 3. *Нехай:*

1) виконуються умови (2), (3) і (5);

2) функції $Y^1(\psi,\tau,\varepsilon)$ і $Y^2(\psi,\tau,\varepsilon)$ неперервно диференційовні по $(\varphi,\tau)\in R^m\times\bar{R}$ при кожному $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, 2π-періодичні по $\varphi_\eta,\eta=\overline{1,m}$, і задовольняють нерівності

$$\|\frac{\partial Y^s}{\partial\psi}\|\le d_2\varepsilon^\alpha,\ (\psi,\tau,\varepsilon)\in G_1,\quad \|\frac{\partial Y^s}{\partial\tau}+\frac{\partial Y^s}{\partial\psi}\frac{\omega(\tau)}{\varepsilon}\|\le\bar{d}_1,\ (\psi,\tau,\varepsilon)\in\underline{G}_1,$$

$$\|\Delta Y^s(\psi,\tau,\varepsilon)|_{\tau=\tau_\nu}\|\le\underline{d}_1\varepsilon,\quad(\psi,\varepsilon)\in R^m\times(0,\varepsilon_0],\nu\in Z,\quad s=1,2.$$

Тоді існує така стала c_6, що при досить малому $\varepsilon_0>0$ для всіх $(\psi,\tau,\varepsilon)\in G_1$ і $t\in R$ виконується оцінка

$$\|\varphi^{t,1}_\tau(\psi,\varepsilon)-\varphi^{t,2}_\tau(\psi,\varepsilon)\|\le c_6e^{\frac{\gamma}{3}|t-\tau|}\sup_{G_1}\|Y^1(\psi,\tau,\varepsilon)-Y^2(\psi,\tau,\varepsilon)\|. \tag{26}$$

Доведення. При $\tau\le t$ з (25) випливає, що

$$\varphi^{t,1}_\tau(\psi,\varepsilon)-\varphi^{t,2}_\tau(\psi,\varepsilon)=\int\limits_\tau^t(b\left(\bar{x}(l,\varepsilon)+Y^1(\varphi^{l,1}_\tau,l,\varepsilon),\varphi^{l,1}_\tau,l,\varepsilon\right)-$$

$$-b\left(\bar{x}(l,\varepsilon)+Y^2(\varphi^{l,2}_\tau,l,\varepsilon),\varphi^{l,1}_\tau,l,\varepsilon)\right)dl+I_1-I_2+\varepsilon\sum_{\tau\le\tau_\nu<t}(q(\bar{x}(\tau_\nu,\varepsilon)+$$

$$+Y^1(\varphi^{\tau_\nu,1}_\tau,\tau_\nu,\varepsilon),\varphi^{\tau_\nu,1}_\tau,\tau_\nu,\varepsilon)-q\left(\bar{x}(\tau_\nu,\varepsilon)+Y^2(\varphi^{\tau_\nu,2}_\tau,\tau_\nu,\varepsilon),\varphi^{\tau_\nu,1}_\tau,\tau_\nu,\varepsilon\right))+S_1-S_2, \tag{27}$$

де

$$I_j=\int\limits_\tau^t b\left(\bar{x}(l,\varepsilon)+Y^2(\varphi^{l,2}_\tau,l,\varepsilon),\varphi^{l,j}_\tau,l,\varepsilon\right)dl,$$

$$S_j = \varepsilon \sum_{\tau \le \tau_\nu < t} q\left(\bar{x}(\tau_\nu, \varepsilon) + Y^2(\varphi_\tau^{\tau_\nu,2}, \tau_\nu, \varepsilon), \varphi_\tau^{\tau_\nu,j}, \tau_\nu, \varepsilon\right), \quad j = 1, 2.$$

Тому на підставі зроблених припущень

$$\|\varphi_\tau^{t,1}(\psi,\varepsilon) - \varphi_\tau^{t,2}(\psi,\varepsilon)\| \le \sup_{G_1} \|Y^1(\psi,\tau,\varepsilon) - Y^2(\psi,\tau,\varepsilon)\| \sigma_1(1+1/\theta)(t-\tau+1) +$$

$$+\sigma_1 d_2 \varepsilon_0^\alpha \left(\int_\tau^t \|\varphi_\tau^{l,1}(\psi,\varepsilon) - \varphi_\tau^{l,2}(\psi,\varepsilon)\| dl + \varepsilon \sum_{\tau \le \tau_\nu < t} \|\varphi_\tau^{\tau_\nu,1}(\psi,\varepsilon) - \varphi_\tau^{\tau_\nu,2}(\psi,\varepsilon)\| \right) +$$

$$+\|I_1 - I_2\| + \|S_1 - S_2\|. \tag{28}$$

Якщо скористатися оцінками осциляційних інтегралів (18) і сум (19) від розривних функцій, обмеженнями (3) на коефіцієнти Фур'є функцій $b(x,\varphi,\tau,\varepsilon)$ і $q(x,\varphi,\tau,\varepsilon)$ та використати методику, розроблену при доведенні леми 1, то для $t \ge \tau + 2$ отримаємо нерівність

$$\|I_1 - I_2\| + \|S_1 - S_2\| \le c_7 \left(\varepsilon_0^\alpha \left[\int_\tau^t \|\varphi_\tau^{l,1}(\psi,\varepsilon) - \varphi_\tau^{l,2}(\psi,\varepsilon)\| dl + \right.\right.$$

$$\left.\left. +\varepsilon \sum_{\tau \le \tau_\nu < t} \|\varphi_\tau^{\tau_\nu,1}(\psi,\varepsilon) - \varphi_\tau^{\tau_\nu,2}(\psi,\varepsilon)\| \right] + (t-\tau) \sup_{G_1} \|Y^1(\psi,\tau,\varepsilon) - Y^2(\psi,\tau,\varepsilon)\| \right). \tag{29}$$

Тоді при $t \ge \tau + 2$ одержуємо

$$\|\varphi_\tau^{t,1}(\psi,\varepsilon) - \varphi_\tau^{t,2}(\psi,\varepsilon)\| \le c_8 (t-\tau+1) \sup_{G_1} \|Y^1(\psi,\tau,\varepsilon) - Y^2(\psi,\tau,\varepsilon)\| +$$

$$+c_8 \varepsilon_0^\alpha \left(\int_\tau^t \|\varphi_\tau^{l,1}(\psi,\varepsilon) - \varphi_\tau^{l,2}(\psi,\varepsilon)\| dl + \varepsilon \sum_{\tau \le \tau_\nu < t} \|\varphi_\tau^{\tau_\nu,1}(\psi,\varepsilon) - \varphi_\tau^{\tau_\nu,2}(\psi,\varepsilon)\| \right),$$

а для $t \in [\tau, \tau+2]$ з (27) безпосередньо знаходимо, що

$$\|\varphi_\tau^{t,1}(\psi,\varepsilon) - \varphi_\tau^{t,2}(\psi,\varepsilon)\| \le 2\sigma_1(1+1/\theta) \sup_{G_1} \|Y^1(\psi,\tau,\varepsilon) - Y^2(\psi,\tau,\varepsilon)\| e^{2\sigma_1(2+1/\theta)}.$$

Об'єднуючи дві останні нерівності, встановлюємо оцінку

$$\|\varphi_\tau^{t,1}(\psi,\varepsilon) - \varphi_\tau^{t,2}(\psi,\varepsilon)\| \le c_9(1+t-\tau) e^{\tilde{c}_9 \varepsilon_0^\alpha (t-\tau)} \sup_{G_1} \|Y^1(\psi,\tau,\varepsilon) - Y^2(\psi,\tau,\varepsilon)\|$$

яка веде до нерівності (26) при $\tilde{c}_9 \varepsilon_0^\alpha \le \gamma/6$ зі сталою $c_6 = 6c_9/\gamma$. При $\tau > t$ доведення аналогічне. Лему доведено.

Лема 4. *Якщо виконуються умови леми 1, то існують такі сталі $\varepsilon_0 > 0$ і $c_{10} = c_{10}(\underline{d}_1, \bar{d}_1)$, що для всіх $(\psi, t, \varepsilon) \in G_1$ і $\nu \in Z$ справедлива нерівність*

$$\|\varphi^t_{\tau_\nu+0}(\psi,\varepsilon) - \varphi^t_{\tau_\nu}(\psi,\varepsilon)\| \leq c_{10}\varepsilon e^{\frac{\gamma}{3}|t-\tau_\nu|}. \tag{30}$$

Доведення. На підставі представлення (27) при $h \in (0, \varepsilon\theta)$ одержимо рівність

$$\varphi^t_{\tau_\nu+h}(\psi,\varepsilon) - \varphi^t_{\tau_\nu}(\psi,\varepsilon) = \int\limits_{\tau_\nu}^{t} \Bigg[\Bigg(b\left(\bar{x}(l,\varepsilon) + Y(\varphi^l_{\tau_\nu+h}, l, \varepsilon), \varphi^l_{\tau_\nu+h}, l, \varepsilon\right) -$$

$$-b\left(\bar{x}(l,\varepsilon) + Y(\varphi^l_{\tau_\nu}, l, \varepsilon), \varphi^l_{\tau_\nu+h}, l, \varepsilon\right)\Bigg) +$$

$$+\Bigg(b\left(\bar{x}(l,\varepsilon) + Y(\varphi^l_{\tau_\nu}, l, \varepsilon), \varphi^l_{\tau_\nu+h}, l, \varepsilon\right)\Big) - b\left(\bar{x}(l,\varepsilon) + Y(\varphi^l_{\tau_\nu}, l, \varepsilon), \varphi^l_{\tau_\nu}, l, \varepsilon\right)\Bigg)\Bigg] dl -$$

$$-\int\limits_{\tau_\nu}^{\tau_\nu+h} [\frac{\omega(l)}{\varepsilon} + b(\bar{x}(l,\varepsilon) + Y(\varphi^l_{\tau_\nu+h}, l, \varepsilon), \varphi^l_{\tau_\nu+h}, l, \varepsilon)]dl -$$

$$-\varepsilon q(\bar{x}(\tau_\nu,\varepsilon) + Y(\psi, \tau_\nu, \varepsilon), \psi, \tau_\nu, \varepsilon),$$

з якої випливає оцінка

$$u(t) \equiv \|\varphi^t_{\tau_\nu+h}(\psi,\varepsilon) - \varphi^t_{\tau_\nu}(\psi,\varepsilon)\| \leq \varepsilon\sigma_1 + (\tilde{\sigma}_1/\varepsilon + \sigma_1)\, h + \sigma_1 d_2 \varepsilon_0^\alpha \int\limits_{\tau_\nu}^{t} u(l)dl +$$

$$+\sum_{k\neq 0} \| \int\limits_{\tau_\nu}^{t} b_k(\bar{x}(l,\varepsilon) + Y(\varphi^l_{\tau_\nu}, l, \varepsilon), l, \varepsilon) \times$$

$$\times \left(\exp\{i(k, \bar{\theta}^l_{\tau_\nu+h})\} - \exp\{i(k, \bar{\theta}^l_{\tau_\nu})\}\right) \exp\{\frac{i}{\varepsilon}\int\limits_{\tau_\nu}^{l} (k, \omega(\xi))d\xi\} dl\|, \tag{31}$$

де $\tilde{\sigma}_1 = \max\limits_{[\tau_\nu, \tau_{\nu+h}]} \|\omega(\tau)\|$, $\bar{\theta}^t_\tau = \varphi^t_\tau - \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\tau}^{t} \omega(\xi)d\xi$.

Для оцінки останнього з чотирьох доданків у правій частині нерівності (31) у випадку $\tau \geq \tau_\nu + 2$ подамо $[\tau_\nu, t]$ у вигляді об'єднання відрізків одиничної довжини і останнього відрізка, довжина якого не менша одиниці і менша двох, використаємо оцінку (18) осциляційного інтеграла, обмеження (3) на коефіцієнти Фур'є b_k та застосуємо метод одержання нерівності (20). Після виконання таких перетворень цей останній доданок у правій частині (31) оцінюємо зверху величиною

$$c_{11}\varepsilon^{\alpha}\left(\int_{\tau_\nu}^{t} u(l)dl + \varepsilon \sum_{\tau_\nu \le \tau_r < t} u(\tau_r)\right),$$

у зв'язку з чим нерівність (31) при $t \ge \tau_\nu + 2$ набуде вигляду

$$u(t) \le \varepsilon\sigma_1 + (\tilde{\sigma}_1/\varepsilon + \sigma_1)h + (\sigma_1 d_2 + c_{11})\varepsilon_0^{\alpha}\left(\int_{\tau_\nu}^{t} u(l)dl + \varepsilon \sum_{\tau_\nu \le \tau_r < t} u(\tau_r)\right). \quad (32)$$

Якщо ж $t \in [\tau_\nu, \tau_\nu + 2)$, то ділити $[\tau_\nu, t]$ на частини нема потреби і з (31) знаходимо, що

$$u(\tau) \le c_{12}(\varepsilon + (\tilde{\sigma}_1/\varepsilon + \sigma_1)h).$$

Тому остання нерівність і нерівність (32) ведуть до оцінки

$$u(t) = \|\varphi^t_{\tau_\nu+h}(\psi,\varepsilon) - \varphi^t_{\tau_\nu}(\psi,\varepsilon)\| \le c_{10}(\varepsilon + (\tilde{\sigma}_1/\varepsilon + \sigma_1)h))e^{c_{13}\varepsilon_0^{\alpha}(t-\tau_\nu)}$$

для всіх $t \ge \tau_\nu, \psi \in R^m, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ і $h \in (0, \varepsilon\theta)$, звідки при $h \to +0$ і $c_{13}\varepsilon_0^{\alpha} \le \gamma/3$ випливає нерівність (30) для $t \ge \tau_\nu$. Випадок $t < \tau_\nu$ досліджується таким же способом.

3. Побудова розривного інтегрального многовиду. Для побудови інтегрального многовиду системи (6), а потім і системи (1) дослідимо деякі властивості функцій $y = Y_j(\psi, \tau, \varepsilon)$, що визначаються рівністю (10).

Нехай

$$\sigma_0 = \bar{\sigma}_0 + \underline{\sigma}_0 < 1, \quad (33)$$

де

$$\bar{\sigma}_0 = \frac{2}{\gamma}K \sup_{\varphi,\tau,x} \|\frac{\partial}{\partial x}\tilde{a}(x,\varphi,\tau)\|, \quad \underline{\sigma}_0 = \frac{2K}{\gamma\theta} \sup_{\varphi,\tau,x} \|\frac{\partial}{\partial x}\tilde{p}(x,\varphi,\tau)\|$$

Теорема 1. *Якщо виконуються умови (2),(3),(5) і (33), то функції* $Y_j = Y_j(\psi,\tau,\varepsilon), j = \overline{0,\infty}$, *неперервно диференційовні по* $(\psi,\tau) \in R^m \times \bar{R}$, 2π *-періодичні по* $\psi_s, s = \overline{1,m}$, *і при досить малому* $\varepsilon_0 > 0$ *задовольняють нерівності*

$$\|Y_j(\psi,\tau,\varepsilon)\| \le d_1\varepsilon^{\alpha}, \quad \|\frac{\partial}{\partial\psi}Y_j(\psi,\tau,\varepsilon)\| \le d_2\varepsilon^{\alpha}, \quad (\psi,\tau,\varepsilon) \in G_1, \quad (34)$$

$$\|\frac{\partial Y_j(\psi,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}+\frac{\partial Y_j(\psi,\tau,\varepsilon)}{\partial\psi}\frac{\omega(\tau)}{\varepsilon}\|\leq\bar{d}_1,\quad(\psi,\tau,\varepsilon)\in\underline{G}_1, \tag{35}$$

$$\|\Delta Y_j(\psi,\tau,\varepsilon)|_{\tau=\tau_\nu}\|\leq\underline{d}_1\varepsilon,\quad(\psi,\varepsilon)\in R^m\times(0,\varepsilon_0],\nu\in Z \tag{36}$$

з $\alpha=(1+l)^{-1}$ *і деякими незалежними від* ε *і* j *сталими* $d_1,\bar{d}_1,\underline{d}_1,d_2$.

Доведення. Згідно із зробленими припущеннями

$$\|\int\limits_{-\infty}^{\infty}Q(\tau,t,\varepsilon)dt\|\leq\frac{2K}{\gamma},\quad\varepsilon\|\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}Q(\tau,\tau_\nu,\varepsilon)\|\leq\frac{2K\varepsilon}{1-e^{-\gamma\theta\varepsilon}}<\frac{2Ke^{\gamma\theta\varepsilon_0}}{\gamma\theta}.$$

Позначимо

$$\bar{\theta}^t_{\tau,j}=\varphi^t_{\tau,j}-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_\tau^t\omega(\xi)d\xi.$$

Тоді із (10), враховуючи отримані вище оцінки і (8), одержимо

$$\sup_{\psi,\tau}\|Y_{j+1}(\psi,\tau,\varepsilon)\|\leq\left[\frac{2K}{\gamma}(1+\theta^{-1}e^{\gamma\theta})\delta_1+\underline{\sigma}_0(e^{\gamma\theta\varepsilon_0}-1)+\sigma_0\right]\times$$

$$\times\sup_{\psi,\tau}\|Y_j(\psi,\tau,\varepsilon)\|+\frac{2}{\gamma}K\varepsilon\sigma_1(1+e^{\gamma\theta}/\theta)+K_1+K_2, \tag{37}$$

де

$$K_1=\sum_{k\neq0}\sum_{s=-\infty}^{\infty}\|\int\limits_{\tau+s}^{\tau+s+1}Q(\tau,t,\varepsilon)a_k(\bar{x}(t,\varepsilon),t)\exp\{i(k,\bar{\theta}^t_{\tau,j})\}\times$$

$$\times\exp\{\frac{i}{\varepsilon}\int\limits_\tau^t(k,\omega(\xi))d\xi\}dt\|,$$

$$K_2=\sum_{k\neq0}\sum_{s=-\infty}^{\infty}\|\varepsilon\sum_{\tau+s\leq\tau_\nu<\tau+s+1}Q(\tau,\tau_\nu,\varepsilon)p_k(\bar{x}(\tau_\nu,\varepsilon),\tau_\nu)\times$$

$$\times\exp\{i(k,\bar{\theta}^{\tau_\nu}_{\tau,j})\}\exp\{\frac{i}{\varepsilon}\int\limits_\tau^{\tau_\nu}(k,\omega(\xi))d\xi\}\|,$$

а $a_k(x,\tau),p_k(x,\tau)$ - коефіцієнти Фур'є функцій $\tilde{a}(x,\varphi,\tau)$ і $\tilde{p}(x,\varphi,\tau)$ відповідно.

Оскільки

$$\frac{dQ(\tau,t,\varepsilon)}{dt}=-Q(\tau,t,\varepsilon)H(\tau,\varepsilon),\quad t\neq\tau,\quad t\neq\tau_\nu,$$

$$\Delta Q(\tau,t,\varepsilon)|_{t=\tau_\nu} = -\varepsilon Q(\tau,\tau_\nu,\varepsilon)G(\tau_\nu,\varepsilon), \quad Q(t,t-0,\varepsilon)-Q(t,t+0,\varepsilon) = E, \tag{38}$$

то для всіх $\tau_\nu \in [\tau+s, \tau+s+1]$ виконується нерівність

$$\|\Delta\left(Q(\tau,t,\varepsilon)a_k(\bar{x}(t,\varepsilon),t)\right)|_{t=\tau_\nu}\| \le \|\Delta Q(\tau,t,\varepsilon)|_{t=\tau_\nu}\| \sup_{[\tau+s,\tau+s+1]} \|a_k(\bar{x}(t,\varepsilon),t)\| +$$

$$+ \sup_{[\tau+s,\tau+s+1]} \|Q(\tau,t,\varepsilon)\| \; \|a_k(\bar{x}(\tau_\nu+0,\varepsilon),\tau_\nu) - a_k(\bar{x}(\tau_\nu,\varepsilon),\tau_\nu)\| \le$$

$$\le \varepsilon\sigma_1(\sup_{\bar{G}}\|a_k\| + \sup_{\bar{G}}\|\frac{\partial a_k}{\partial x}\|) \sup_{[\tau+s,\tau+s+1]} \|Q(\tau,t,\varepsilon)\|, \quad k \ne 0.$$

Далі за допомогою нерівності (23), як і в [4, с.164], встановлюємо оцінку

$$K_1 \le \tilde{\sigma}_5 \varepsilon^\alpha \sum_{k\ne 0} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \{[\sup_{\bar{G}}\|a_k\| + \frac{1}{\|k\|}(\sup_{\bar{G}}\|\frac{\partial a_k}{\partial x}\| + \sup_{\bar{G}}\|\frac{\partial a_k}{\partial \tau}\|)]\times$$

$$\times \max_{[\tau+s,\tau+s+1]} e^{-\gamma|t-\tau|}\} \le \bar{\sigma}_5 \varepsilon^\alpha$$

зі сталою $\bar{\sigma}_5$, яка не залежить від j і ε.

Аналогічні міркування дозволяють встановити оцінку

$$K_2 \le \underline{\sigma}_5 \varepsilon^\alpha.$$

Таким чином, якщо вибрати додатні ε_0 і δ_1 настільки малими, щоб

$$\frac{2K}{\gamma}(1+\theta^{-1}e^{\gamma\theta})\delta_1 \le \frac{1-\sigma_0}{4}, \quad \underline{\sigma}_0(e^{\gamma\theta\varepsilon_0}-1) \le \frac{1-\sigma_0}{4}$$

і покласти

$$\bar{\sigma}_5 + \underline{\sigma}_5 + \frac{2K}{\gamma}\sigma_1(1+\theta^{-1}e^{\gamma\theta}) = \sigma_5,$$

то із (37) одержимо нерівність

$$\sup_{\psi,\tau}\|Y_{j+1}(\psi,\tau,\varepsilon)\| \le \frac{1+\sigma_0}{2}\sup_{\psi,\tau}\|Y_j(\psi,\tau,\varepsilon)\| + \sigma_5\varepsilon^\alpha.$$

Оскільки $Y_0 \equiv 0$ і $\sigma_0 < 1$, то звідси отримаємо, що

$$\|Y_j(\psi,\tau,\varepsilon)\| \le d_1\varepsilon^\alpha$$

для всіх $(\psi,\tau,\varepsilon) \in G_1$, де $d_1 = 2\sigma_5/(1-\sigma_0)$, а малість ε_0 визначається умовою

$$d_1\varepsilon_0^\alpha \le \frac{1}{2}\min\{\rho, \delta_2(\delta_1)\}.$$

Отже, перша з нерівностей (34) встановлена.

Для доведення всіх інших нерівностей теореми 1 використаємо метод математичної індукції. Позначимо

$$A_k(x,\tau) = (a_k^{(\mu)}(x,\tau)k_\eta)_{\mu,\eta=1}^{n,m}, \quad P_k(x,\tau) = (p_k^{(\mu)}(x,\tau)k_\eta)_{\mu,\eta=1}^{n,m},$$

де $a_k = (a_k^{(1)},...,a_k^{(n)}), p_k = (p_k^{(1)},...,p_k^{(n)}), k = (k_1,...,k_m)$. Враховуючи, що $Y_0(\psi,\tau,\varepsilon) \equiv 0$, а $\varphi = \varphi_{t,0}^{\tau}(\psi,\varepsilon)$ – розв'язок системи (9) при $j=0$, із (10) для всіх $(\psi,\tau,\varepsilon) \in G_1$ випливає оцінка

$$\|\frac{\partial}{\partial\psi}Y_1(\psi,\tau,\varepsilon)\| \le \varepsilon\sigma_1 K \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma|t-\tau|}(m + \|\frac{\partial}{\partial\psi}(\varphi_{\tau,0}^t - \psi)\|)dt + \bar{K}_1 +$$

$$+\varepsilon^2\sigma_1 K \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{-\gamma|\tau_\nu-\tau|}(m + \|\frac{\partial}{\partial\psi}(\varphi_{\tau,0}^{\tau_\nu} - \psi)\|) + \bar{K}_2, \qquad (39)$$

де

$$\bar{K}_1 \equiv \sum_{k\neq 0}\sum_{s=-\infty}^{\infty} \| \int\limits_{s+\tau}^{s+\tau+1} Q(\tau,t,\varepsilon)A_k(\bar{x}(t,\varepsilon),t)(E + \frac{\partial}{\partial\psi}(\varphi_{\tau,0}^t - \psi))\times$$

$$\times exp\{i(k,\bar{\theta}_{\tau,0}^t)\}exp\{\frac{i}{\varepsilon}\int\limits_{\tau}^{t}(k,\omega(\xi))d\xi\}dt\|,$$

$$\bar{K}_2 = \sum_{k\neq 0}\sum_{s=-\infty}^{\infty}\|\varepsilon \sum_{\tau+s\le\tau_\nu<\tau+s+1} Q(\tau,\tau_\nu,\varepsilon)P_k(\bar{x}(\tau_\nu,\varepsilon),\tau_\nu)(E + \|\frac{\partial}{\partial\psi}(\varphi_{\tau,0}^{\tau_\nu} - \psi)\|)\times$$

$$\times \exp\{i(k,\bar{\theta}_{\tau,0}^{\tau_\nu})\}\exp\{\frac{i}{\varepsilon}\int\limits_{\tau}^{\tau_\nu}(k,\omega(\xi))d\xi\}\|.$$

Для оцінки $\bar{K}_1$ і $\bar{K}_2$ використаємо лему 2. У випадку $\bar{K}_1$ виберемо в якості f вираз $Q(\tau,t,\varepsilon)A_k(\bar{x}(t,\varepsilon),t)$, а в якості g – вираз $E + z_\tau^t$, де $z_\tau^t = \frac{\partial}{\partial\psi}(\varphi_{\tau,0}^t - \psi)$. Тоді для всіх $\tau_\nu \in [\tau+s,\tau+s+1]$ маємо, що

$$\|\Delta f|_{t=\tau_\nu}\| \le \varepsilon\sigma_1\|k\|(\sup_{\bar{G}}\|a_k\| + \sup_{\bar{G}}\|\frac{\partial a_k}{\partial x}\|)\sup_{[\tau+s,\tau+s+1]}\|Q(\tau,t,\varepsilon)\|,$$

$$\|\Delta g|_{t=\tau_\nu}\| \le \varepsilon 2\sigma_1\left(\|z_\tau^{\tau_j}\| + m\right).$$

Для оцінювання $\bar{K}_2$ покладемо $f = Q(\tau, t, \varepsilon)P_k(\bar{x}(t, \varepsilon), t)$, а $g = E + z_\tau^t$ і отримаємо аналогічну нерівність

$$\|\Delta f|_{t=\tau_\nu}\| \leq \varepsilon\sigma_1\|k\|(\sup_{\bar{G}}\|p_k\| + \sup_{\bar{G}}\|\frac{\partial p_k}{\partial x}\|) \sup_{[\tau+s,\tau+s+1]}\|Q(\tau, t, \varepsilon)\|.$$

Отже, на основі леми 2

$$\bar{K}_1+\bar{K}_2 \leq \sigma_6\varepsilon^\alpha \sum_{s=-\infty}^{\infty}\left(1 + \int\limits_{\tau+s}^{\tau+s+1}\|z_\tau^l\|dl + \varepsilon \sum_{\tau+s\leq\tau_\nu<\tau+s+1}\|z_\tau^{\tau_\nu}\|\right) \max_{[\tau+s,\tau+s+1]} e^{-\gamma|t-\tau|} \tag{40}$$

з деякою сталою σ_6.

Оскільки $\|\frac{\partial}{\partial\psi}Y_0(\psi, \tau, \varepsilon)\| \leq d_2\varepsilon^\alpha$ зі сталою $d_2 > 0$, яку буде означено нижче, і

$$\|\frac{\partial Y_0(\psi, \tau, \varepsilon)}{\partial\tau} + \frac{\partial Y_0(\psi, \tau, \varepsilon)}{\partial\psi}\frac{\omega(\tau)}{\varepsilon}\| \leq \bar{d}_1 \equiv 3\sigma_1(1 + \rho), \tag{41}$$

то для оцінки $\|z_\tau^t\|$ застосуємо лему 1 і, як і в роботі [4, с. 165], враховуючи нерівності (39)-(41), одержимо

$$\|\frac{\partial}{\partial\psi}Y_1(\psi, \tau, \varepsilon)\| \leq d_2\varepsilon^\alpha, \quad (\psi, \tau, \varepsilon) \in G_1.$$

Подамо далі різницю $Y_1(\psi, \tau_r + 0, \varepsilon) - Y_1(\psi, \tau_r, \varepsilon) = \eta$ у вигляді

$$\eta = \varepsilon G(\tau_r, \varepsilon)\int\limits_{-\infty}^{\infty} Q(\tau_r, t, \varepsilon)F_1(0, \varphi_{\tau_r+0,0}^t, t, \varepsilon)dt + \int\limits_{-\infty}^{\infty} Q(\tau_r, t, \varepsilon)[F_1(0, \varphi_{\tau_r+0,0}^t, t, \varepsilon) -$$

$$-F_1(0, \varphi_{\tau_r,0}^t, t, \varepsilon)]dt + \varepsilon^2 G(\tau_r, \varepsilon)\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} Q(\tau_r, \tau_\nu, \varepsilon)\Phi_1(0, \varphi_{\tau_r+0,0}^{\tau_\nu}, \tau_\nu, \varepsilon) +$$

$$+\varepsilon\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} Q(\tau_r, \tau_\nu, \varepsilon)[\Phi_1(0, \varphi_{\tau_r+0,0}^{\tau_\nu}, \tau_\nu, \varepsilon) - \Phi_1(0, \varphi_{\tau_r,0}^{\tau_\nu}, \tau_\nu, \varepsilon)].$$

Звідси на підставі леми 4 встановлюємо, що

$$\|Y_1(\psi, \tau_r + 0, \varepsilon) - Y_1(\psi, \tau_r, \varepsilon)\| \leq \bar{d}_1\varepsilon$$

з деякою сталою $\bar{d}_1$ для всіх $(\psi, \varepsilon) \in R^m \times (0, \varepsilon_0]$ і $r \in Z$.

З експоненціальної оцінки (5) норми матриці $Q(\tau, t, \varepsilon)$ випливає рівномірна збіжність інтеграла і ряду з правої частини (10) при $\tau \in [-T, T], \psi \in R^m, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ для $j = 0$, а також інтегралів та рядів, що отримуються з них шляхом диференціювання по ψ і τ під знаками відповідно інтеграла та суми. Тут T – довільне додатне число. Тому функції $Y_1(\psi,\tau,\varepsilon)$, $\frac{\partial}{\partial\psi}Y_1(\psi,\tau,\varepsilon)$ і $\frac{\partial}{\partial\tau}Y_1(\psi,\tau,\varepsilon)$ неперервні по ψ,τ при $\psi\in R^m, \tau\in[-T,T], \tau\neq\tau_\nu$. На підставі довільності T одержуємо їх неперервність при $\tau\in\bar{R}$. Це дає можливість міняти місцями операції диференціювання та інтегрування і сумування, тому для всіх $(\psi,\tau,\varepsilon)\in\underline{G}_1$ при $j=0$ з (10) випливає рівність

$$\frac{\partial Y_{j+1}(\psi,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}+\frac{\partial Y_{j+1}(\psi,\tau,\varepsilon)}{\partial\psi}\left(\frac{\omega(\tau)}{\varepsilon}+\tilde{b}(\psi,\tau,\varepsilon)\right)=$$
$$=H(\tau,\varepsilon)Y_{j+1}(\psi,\tau,\varepsilon)+F_1(Y_j(\psi,\tau,\varepsilon),\psi,\tau,\varepsilon)+$$
$$+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial B_1}{\partial\varphi}\left[\frac{\partial\varphi^t_{\tau,j}}{\partial\tau}+\frac{\partial\varphi^t_{\tau,j}}{\partial\psi}\left(\frac{\omega(\tau)}{\varepsilon}+\tilde{b}(\psi,\tau,\varepsilon)\right)\right]dt+$$
$$+\varepsilon\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\frac{\partial B_2}{\partial\varphi}\left[\frac{\partial\varphi^{\tau_\nu}_{\tau,j}}{\partial\tau}+\frac{\partial\varphi^{\tau_\nu}_{\tau,j}}{\partial\psi}\left(\frac{\omega(\tau)}{\varepsilon}+\tilde{b}(\psi,\tau,\varepsilon)\right)\right] \tag{42}$$

в якій $\tilde{b}(\psi,\tau,\varepsilon)=b(\bar{x}(\tau,\varepsilon)+Y_j(\psi,\tau,\varepsilon),\psi,\tau,\varepsilon)$, а B_1 і B_2 позначають відповідно функції, що записані під знаками інтеграла та суми в правій частині рівності (10).

З рівнянь (9) знаходимо, що

$$\frac{\partial\varphi^t_{\tau,j}}{\partial\tau}+\frac{\partial\varphi^t_{\tau,j}}{\partial\psi}\left(\frac{\omega(\tau)}{\varepsilon}+\tilde{b}(\psi,\tau,\varepsilon)\right)=\int\limits_{\tau}^{t}\frac{\partial\tilde{b}(\varphi^l_{\tau,j},l,\varepsilon)}{\partial\varphi}\left[\frac{\partial\varphi^l_{\tau,j}}{\partial\tau}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial\varphi^l_{\tau,j}}{\partial\psi}\left(\frac{\omega(\tau)}{\varepsilon}+\tilde{b}(\psi,\tau,\varepsilon)\right)\right]dl+\varepsilon\sum_{\tau<\tau_\nu<t}\frac{\partial\tilde{q}(\varphi^{\tau_\nu}_{\tau,j},\tau_\nu,\varepsilon)}{\partial\varphi}\left[\frac{\partial\varphi^{\tau_\nu}_{\tau,j}}{\partial\tau}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial\varphi^{\tau_\nu}_{\tau,j}}{\partial\psi}\left(\frac{\omega(\tau)}{\varepsilon}+\tilde{b}(\psi,\tau,\varepsilon)\right)\right],$$

де $\tilde{q}(\psi,\tau,\varepsilon)=q(\bar{x}(\tau,\varepsilon)+Y_j(\psi,\tau,\varepsilon),\psi,\tau,\varepsilon)$. Покладаючи

$$f(t)=\frac{\partial\varphi^t_{\tau,j}}{\partial\tau}+\frac{\partial\varphi^t_{\tau,j}}{\partial\psi}\left(\frac{\omega(\tau)}{\varepsilon}+\tilde{b}(\psi,\tau,\varepsilon)\right),$$

з останньої рівності отримаємо нерівність

$$\|f(t)\|\leq\int\limits_{\tau}^{t}\|f(l)\|dl\sup_{G_1}\left\|\frac{\partial\tilde{b}(\psi,\tau,\varepsilon)}{\partial\psi}\right\|+\varepsilon\sum_{\tau<\tau_\nu<t}\|f(\tau_\nu)\|\sup_{G_1}\left\|\frac{\partial\tilde{q}(\psi,\tau,\varepsilon)}{\partial\psi}\right\|.$$

Звідси одержуємо [2], що $f(t) \equiv 0$, тому рівність (42) при $j = 0$ і $(\psi, \tau, \varepsilon) \in \underline{G}_1$ набуває вигляду

$$\frac{\partial Y_{j+1}(\psi,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau} + \frac{\partial Y_{j+1}(\psi,\tau,\varepsilon)}{\partial\psi}\left(\frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + b(\bar{x}(\tau,\varepsilon) + Y_j(\psi,\tau,\varepsilon),\psi,\tau,\varepsilon)\right) =$$

$$= H(\tau,\varepsilon)Y_{j+1}(\psi,\tau,\varepsilon) + F_1(Y_j(\psi,\tau,\varepsilon),\psi,\tau,\varepsilon). \tag{43}$$

З (43) при $\sigma_2\varepsilon_0^\alpha \le 1$ випливає нерівність

$$\left\|\frac{\partial Y_1(\psi,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau} + \frac{\partial Y_1(\psi,\tau,\varepsilon)}{\partial\psi}\frac{\omega(\tau)}{\varepsilon}\right\| \le \bar{d}_1, \quad (\psi,\tau,\varepsilon) \in G_1.$$

Припустимо, що нерівність (35), (36) і друга з нерівностей (34) справджуються для всіх $j = \overline{1, h-1}$, де $2 < h$ — деяке натуральне число. Доведемо їх для $j = h$.

На підставі (7) із (10) для всіх $(\psi, \tau, \varepsilon) \in G_1$ одержимо нерівність

$$\sup_{\psi,\tau}\left\|\frac{\partial}{\partial\psi}Y_h(\psi,\tau,\varepsilon)\right\| \le \left[\frac{2}{\gamma}K(1+\theta^{-1}e^{\gamma\theta})\delta_1 + \frac{2}{\gamma}K\sigma_1(1+\theta^{-1}e^{\gamma\theta})\varepsilon + \right.$$

$$\left. +\underline{\sigma}_0(e^{\gamma\theta\varepsilon_0}-1) + \sigma_0\right]\sup_{\psi,\tau}\left\|\frac{\partial}{\partial\psi}Y_{h-1}(\psi,\tau,\varepsilon)\right\| + (\delta_1 + 2\sigma_1)c_1(1+d_2)\times$$

$$\times\frac{3}{\gamma}K(1+\theta^{-1}e^{\frac{2}{3}\gamma\theta})d_2\varepsilon^{2\alpha} + \sigma_1 c_1(1+d_2)\frac{3}{\gamma}K(1+\theta^{-1}e^{\frac{2}{3}\gamma\theta})\varepsilon^{1+\alpha} + \underline{K}_1 + \underline{K}_2, \tag{44}$$

де

$$\underline{K}_1 = \sum_{k\ne0}\sum_{s=-\infty}^{\infty}\left\|\int_{\tau+s}^{\tau+s+1}Q(\tau,t,\varepsilon)A_k(\bar{x}(t,\varepsilon) + Y_{h-1}(\varphi^t_{\tau,h-1},t,\varepsilon),t)\times\right.$$

$$\left.\times\exp\{i(k,\bar{\theta}^t_{\tau,h-1})\}\exp\{\frac{i}{\varepsilon}\int_\tau^t(k,\omega(\xi))d\xi\}dt\right\|,$$

$$\underline{K}_2 = \sum_{k\ne0}\sum_{s=-\infty}^{\infty}\left\|\varepsilon\sum_{\tau+s\le\tau_\nu<\tau+s+1}Q(\tau,\tau_\nu,\varepsilon)P_k(\bar{x}(\tau_\nu,\varepsilon) + Y_{h-1}(\varphi^{\tau_\nu}_{\tau,h-1},\tau_\nu,\varepsilon),\tau_\nu)\times\right.$$

$$\left.\times\exp\{i(k,\bar{\theta}^{\tau_\nu}_{\tau,h-1})\}\exp\{\frac{i}{\varepsilon}\int_\tau^{\tau_\nu}(k,\omega(\xi))d\xi\}\right\|.$$

За допомогою оцінок (18) і (19) встановлюємо, що при $d_2\varepsilon_0^\alpha \le 1$

$$\underline{K}_1 + \underline{K}_2 \le \sigma_7\varepsilon^\alpha$$

зі сталою σ_7, яка залежить від $\underline{d}_1$ і $\bar{d}_1$, але не залежить від d_2. Виберемо $\delta_1 > 0$ і $\varepsilon_0 > 0$ так, щоб

$$\frac{2}{\gamma}K(1+\theta^{-1}e^{\gamma\theta})\delta_1 < \frac{1-\sigma_0}{6}, \quad \frac{2}{\gamma}K\sigma_1(1+\theta^{-1}e^{\gamma\theta})\varepsilon_0 < \frac{1-\sigma_0}{6},$$

$$\underline{\sigma}_0(e^{\gamma\theta\varepsilon_0}-1) < \frac{1-\sigma_0}{6}, \quad (\delta_1+2\sigma_1)c_1(1+d_2)\frac{3}{\gamma}K(1+\theta^{-1}e^{\frac{2}{3}\gamma\theta})d_2\varepsilon_0^\alpha < 1,$$

$$\sigma_1 c_1(1+d_2)\frac{3}{\gamma}K(1+\theta^{-1}e^{\frac{2}{3}\gamma\theta})\varepsilon_0 < 1.$$

Тоді з нерівності (44) дістанемо оцінку

$$\sup_{\psi,\tau}\left\|\frac{\partial}{\partial\psi}Y_h(\psi,\tau,\varepsilon)\right\| < \frac{1+\sigma_0}{2}\sup_{\psi,\tau}\left\|\frac{\partial}{\partial\psi}Y_{h-1}(\psi,\tau,\varepsilon)\right\| + (2+\sigma_7)\varepsilon^\alpha,$$

з якої з урахуванням того, що $\sigma_0 < 1$ і $\left\|\frac{\partial}{\partial\psi}Y_{h-1}(\psi,\tau,\varepsilon)\right\| \le d_2\varepsilon^\alpha$, отримаємо нерівність

$$\left\|\frac{\partial}{\partial\psi}Y_h(\psi,\tau,\varepsilon)\right\| \le d_2\varepsilon^\alpha, \quad (\psi,\tau,\varepsilon)\in G_1$$

зі сталою $d_2 = 2(2+\sigma_7)(1-\sigma_0)^{-1}$.

Як і у випадку $j=0$ показуємо, що рівність (43) справедлива для $j=h-1$ і з неї знаходимо

$$\left\|\frac{\partial Y_h(\psi,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau} + \frac{\partial Y_h(\psi,\tau,\varepsilon)}{\partial\psi}\frac{\omega(\tau)}{\varepsilon}\right\| \le \bar{d}_1, \quad (\psi,\tau,\varepsilon)\in \underline{G}_1.$$

Дослідимо далі оцінку для

$$\Delta Y_h(\psi,\tau,\varepsilon)|_{\tau=\tau_r} = Y_h(\psi,\tau_r+0,\varepsilon) - Y_h(\psi,\tau_r,\varepsilon).$$

Із (10) доводимо нерівність

$$\left\|\Delta Y(\psi,\tau,\varepsilon)|_{\tau=\tau_r}\right\| \le \frac{4}{\gamma}K\sigma_1^2(1+\rho)(1+\theta^{-1}e^{\gamma\theta})\varepsilon + (\delta_1 d_2 + 2\sigma_1 d_2 + \sigma_1)\times$$

$$\times\frac{3}{\gamma}K(1+\theta^{-1}e^{\frac{2}{3}\gamma\theta})c_{10}\varepsilon^{1+\alpha} + \tilde{K}_1 + \tilde{K}_2, \tag{45}$$

де

$$\tilde{K}_1=\sum_{k\neq 0}\sum_{s=-\infty}^{\infty}\Bigg\|\int\limits_{\tau_r+s}^{\tau_r+s+1}Q(\tau_r,t,\varepsilon)a_k(\bar{x}(t,\varepsilon)+Y_{h-1}(\psi^t_{\tau_{r,h-1}},t,\varepsilon),t)\times$$

$$\times(\exp\{i(k,\bar{\theta}^t_{\tau_r+0,h-1})\}-\exp\{i(k,\bar{\theta}^t_{\tau_r,h-1})\})\exp\{\frac{i}{\varepsilon}\int\limits_{\tau_r}^{t}(k,\omega(\xi))d\xi\}dt\Bigg\|,$$

$$\tilde{K}_2=\sum_{k\neq 0}\sum_{s=-\infty}^{\infty}\Bigg\|\varepsilon\sum_{\tau_r+s\leq\tau_\nu<\tau_r+s+1}Q(\tau_r,\tau_\nu,\varepsilon)p_k(\bar{x}(\tau_\nu,\varepsilon)+Y_{h-1}(\varphi^{\tau_\nu,h-1}_{\tau_r},\tau_\nu,\varepsilon),\tau_\nu)\times$$

$$\times(\exp\{i(k,\theta^{\tau_\nu}_{\tau_r+0,h-1})\}-\exp\{i(k,\theta^{\tau_\nu}_{\tau_r,h-1})\})\exp\{\frac{i}{\varepsilon}\int\limits_{\tau_r}^{\tau_\nu}(k,\omega(\xi))d\xi\}\Bigg\|.$$

Оскільки

$$|\eta_{h-1}(t,r,k)|\leq\varepsilon c_{10}\|k\|e^{\frac{\gamma}{3}|t-\tau_r|},\quad\left|\frac{d}{dt}\eta_{h-1}(t,r,k)\right|\leq\varepsilon 3c_{10}\|k\|e^{\frac{\gamma}{3}|t-\tau_r|},$$

$$|\Delta\eta_{h-1}(t,r,k)|_{t=\tau_\nu}|\leq\varepsilon^2 3\sigma_1 c_{10}\|k\|^2 e^{\frac{\gamma}{3}|\tau_\nu-\tau_r|},$$

де

$$\eta_s(t,r,k)=\exp\{i(k,\bar{\theta}^t_{\tau_r+0,s})\}-\exp\{i(k,\bar{\theta}^t_{\tau_r,s})\},$$

то

$$\tilde{K}_1+\tilde{K}_2\leq\sigma_8\varepsilon^{1+\alpha}.$$

Тут σ_8 — стала, яка залежить від $\underline{d}_1$. Нехай

$$\underline{d}_1=\frac{4}{\gamma}K\sigma_1^2(1+\rho)(1+\theta^{-1})e^{\gamma\theta}+1,$$

а ε_0 настільки мале, що

$$[(\delta_1 d_2+2\sigma_1 d_2+\sigma_1)\frac{3}{\gamma}K(1+\theta^{-1}e^{\frac{2}{3}\gamma\theta})c_{10}+\sigma_8]\varepsilon_0^\alpha\leq 1.$$

Тоді з нерівності (45) випливає, що

$$\|\Delta Y_h(\psi,\tau,\varepsilon)|_{\tau=\tau_r}\|\leq\varepsilon\underline{d}_1\quad\forall\ (\psi,\varepsilon)\in R^m\times(0,\varepsilon_0],\quad r\in Z.$$

Таким чином, згідно з методом математичної індукції доведено нерівності (34)—(36) для всіх $j\geq 0$.

Періодичність функцій $Y_j(\psi,\tau,\varepsilon)$, $j\geq 0$, по $\psi_s, s=\overline{1,m}$, встановлюється аналогічно, як і в монографії [4, с.171]. Теорему доведено.

Вивчені властивості функцій $Y_j(\psi,\tau,\varepsilon)$ дають можливість будувати інтегральний многовид $x=X(\psi,\tau,\varepsilon)$ системи (1).

Теорема 2. *При виконанні умов теореми 1 справджуються наступні твердження:*

1) існує інтегральний многовид $x=X(\psi,\tau,\varepsilon)$ системи (1), який лежить в $d_1\varepsilon^{\alpha}$-околі кривої $x=\bar{x}(\tau,\varepsilon)$ для всіх $(\psi,\tau,\varepsilon)\in G_1$;

2) функція $X(\psi,\tau,\varepsilon)$ 2π-періодична по ψ_s, $s=\overline{1,m}$, задовольняє умов у Ліпшиця по ψ зі сталою, пропорційною ε^{α}, кусково-неперервна по τ з розривами першого роду при $\tau=\tau_\nu$;

3) на інтегральному многовиді система (1) набуває вигляду

$$\frac{d\varphi}{d\tau}=\frac{\omega(\tau)}{\varepsilon}+b(X(\varphi,\tau,\varepsilon),\varphi,\tau,\varepsilon),\quad \tau\neq\tau_\nu,$$
$$\Delta\varphi|_{\tau=\tau_\nu}=\varepsilon q(X(\varphi,\tau_\nu,\varepsilon),\varphi,\tau_\nu,\varepsilon).$$

Доведення. Із (10) та леми 3 встановлюємо нерівність

$$\|Y_{j+1}(\psi,\tau,\varepsilon)-Y_j(\psi,\tau,\varepsilon)\|\leq\Bigg[\sigma_0+\frac{2}{\gamma}K(1+\theta^{-1}e^{\theta\gamma})\delta_1+\underline{\sigma}_0(e^{\gamma\theta\varepsilon_0}-1)+$$
$$+\frac{2}{\gamma}K(1+\theta^{-1}e^{\gamma\theta})\varepsilon\sigma_1+c_6d_2(\delta_1+2\sigma_1)\frac{3K}{\gamma}(1+\theta^{-1}e^{\frac{2}{3}\gamma\theta})\varepsilon^{\alpha}\Bigg]\times$$
$$\times\sup_{G_1}\|Y_j(\psi,\tau,\varepsilon)-Y_{j-1}(\psi,\tau,\varepsilon)\|+\underline{K}_1+\underline{K}_2, \tag{46}$$

в якій

$$\underline{K}_1=\sum_{k\neq0}\sum_{s=-\infty}^{\infty}\Bigg\|\int\limits_{\tau+s}^{\tau+s+1}Q(\tau,t,\varepsilon)a_k(\bar{x}(t,\varepsilon)+Y_j(\varphi^t_{\tau,j},t,\varepsilon),t)\times$$
$$\times[\exp\{i(k,\bar{\theta}^t_{\tau,j})\}-\exp\{i(k,\bar{\theta}^t_{\tau,j-1})\}]\exp\{\frac{i}{\varepsilon}\int\limits_{\tau}^{t}(k,\omega(\xi))d\xi\}dt\Bigg\|,$$

$$\underline{K}_2=\sum_{k\neq0}\sum_{s=-\infty}^{\infty}\Bigg\|\varepsilon\sum_{\tau+s\leq\tau_\nu<\tau+s+1}Q(\tau,\tau_\nu,\varepsilon)p_k(\bar{x}(\tau_\nu,\varepsilon)+Y_j(\varphi^{\tau_\nu}_{\tau,j},\tau_\nu,\varepsilon),\tau_\nu)\times$$
$$\times[\exp\{i(k,\bar{\theta}^{\tau_\nu}_{\tau,j})\}-\exp\{i(k,\bar{\theta}^{\tau_\nu}_{\tau,j-1})\}]\exp\{\frac{i}{\varepsilon}\int\limits_{\tau}^{\tau_\nu}(k,\omega(\xi))d\xi\}dt\Bigg\|.$$

На підставі леми 3 і нерівності (5) одержимо оцінку вигляду

$$\underline{K}_1 + \underline{K}_2 \leq \sigma_9 \varepsilon^\alpha \sup_{G_1} \|Y_j(\psi,\tau,\varepsilon) - Y_{j-1}(\psi,\tau,\varepsilon)\|,$$

завдяки якій із (46) при досить малих додатних δ_1 і ε_0 дістанемо, що

$$\sup_{G_1} \|Y_{j+1}(\psi,\tau,\varepsilon) - Y_j(\psi,\tau,\varepsilon)\| \leq \frac{1+\sigma_0}{2} \sup_{G_1} \|Y_j(\psi,\tau,\varepsilon) - Y_{j-1}(\psi,\tau,\varepsilon)\|.$$

Оскільки $\sigma_0 < 1$, то звідси випливає рівномірна збіжність послідовності $\{Y_j(\psi,\tau,\varepsilon)\}$ на множині G_1 і гранична функція

$$Y(\psi,\tau,\varepsilon) = \lim_{j\to\infty} Y_j(\psi,\tau,\varepsilon) \tag{47}$$

на основі теореми 1 неперервна по $(\psi,\tau) \in R^m \times \bar{R}$, 2π-періодична по ψ_s, $s = \overline{1,m}$, та задовольняє нерівності

$$\|Y(\psi,\tau,\varepsilon)\| \leq d_1\varepsilon^\alpha, \quad \|Y(\psi,\tau,\varepsilon) - Y(\bar{\psi},\tau,\varepsilon)\| \leq d_2\varepsilon^\alpha\|\psi - \bar{\psi}\|$$

для всіх $(\psi,\tau,\varepsilon) \in G_1$, $\bar{\psi} \in R^m$.

З нерівності (26) випливає, що при $t \in [-T,T]$, $(\psi,\tau,\varepsilon) \in G_1$, де T — довільне додатне число, послідовність $\{\varphi^t_{\tau,j}(\psi,\varepsilon)\}$ також рівномірно збіжна до $\varphi^t_\tau(\psi,\varepsilon)$:

$$\lim_{j\to\infty} \varphi^t_{\tau,j}(\psi,\varepsilon) = \varphi^t_\tau(\psi,\varepsilon), \quad (\psi,\tau,\varepsilon) \in G_1, t \in R. \tag{48}$$

Покажемо, що $y = Y(\psi,\tau,\varepsilon)$ визначає інтегральний многовид системи (6). Оскільки $y = Y_{j+1}(\psi,\tau,\varepsilon)$ — інтегральний многовид системи (8), (9), то для її розв'язків $\varphi = \varphi^\tau_{t,j}(\psi,\varepsilon)$, $y = Y_{j+1}(\varphi^\tau_{t,j}(\psi,\varepsilon),\tau,\varepsilon)$ маємо

$$\varphi^\tau_{t,j} = \psi + \int_t^\tau \left[\frac{\omega(l)}{\varepsilon} + b(\bar{x}(l,\varepsilon) + Y_j(\varphi^l_{t,j}(\psi,\varepsilon),l,\varepsilon), \varphi^l_{t,j}(\psi,\varepsilon),l,\varepsilon)\right] dl +$$

$$+\varepsilon \sum_{t\leq\tau_\nu<\tau} g(\bar{x}(\tau_\nu,\varepsilon) + Y_j(\varphi^{\tau_\nu}_{t,j}(\psi,\varepsilon),\tau_\nu,\varepsilon), \varphi^{\tau_\nu}_{t,j}(\psi,\varepsilon),\tau_\nu,\varepsilon),$$

$$Y_{j+1}(\varphi^\tau_{t,j}(\psi,\varepsilon),\tau,\varepsilon) = Y_{j+1}(\psi,t,\varepsilon) + \int_t^\tau [H(l,\varepsilon)Y_{j+1}(\varphi^l_{t,j}(\psi,\varepsilon),l,\varepsilon) +$$

$$+F_1(Y_j(\varphi^l_{t,j}(\psi,\varepsilon),l,\varepsilon), \varphi^l_{t,j}(\psi,\varepsilon),l,\varepsilon)]dl + \varepsilon \sum_{t\leq\tau_\nu<\tau} [G(\tau_\nu,\varepsilon)Y_{j+1}(\varphi^{\tau_\nu}_{t,j}(\psi,\varepsilon),\tau_\nu,\varepsilon) +$$

$$+\Phi_1(Y_j(\varphi_{t,j}^{\tau_\nu}(\psi,\varepsilon),\tau_\nu,\varepsilon),\varphi_{t,j}^{\tau_\nu}(\psi,\varepsilon),\tau_\nu,\varepsilon)]. \tag{49}$$

Якщо перейти до границі в (49) при $j\to\infty$ і скористатися рівностями (47) і (48), то дістанемо тотожності

$$\varphi_t^\tau(\psi,\varepsilon)=\psi+\int_t^\tau\left[\frac{\omega(l)}{\varepsilon}+b(\bar{x}(l,\varepsilon)+Y(\varphi_t^l(\psi,\varepsilon),l,\varepsilon),\varphi_t^l(\psi,\varepsilon),l,\varepsilon)\right]dl+$$

$$+\varepsilon\sum_{t\le\tau_\nu<\tau}g(\bar{x}(\tau_\nu,\varepsilon)+Y(\varphi_t^{\tau_\nu}(\psi,\varepsilon),\tau_\nu,\varepsilon),\varphi_t^{\tau_\nu}(\psi,\varepsilon),\tau_\nu,\varepsilon),$$

$$Y(\varphi_t^\tau(\psi,\varepsilon),\tau,\varepsilon)=Y(\psi,t,\varepsilon)+\int_t^\tau[H(l,\varepsilon)Y(\varphi_t^l(\psi,\varepsilon),l,\varepsilon)+$$

$$+F_1(Y(\varphi_t^l(\psi,\varepsilon),l,\varepsilon),\varphi_t^l(\psi,\varepsilon),l,\varepsilon)]dl+\varepsilon\sum_{t\le\tau_\nu<\tau}[G(\tau_\nu,\varepsilon)Y(\varphi_t^{\tau_\nu}(\psi,\varepsilon),\tau_\nu,\varepsilon)+$$

$$+\Phi_1(Y(\varphi_t^{\tau_\nu}(\psi,\varepsilon),\tau_\nu,\varepsilon),\varphi_t^{\tau_\nu}(\psi,\varepsilon),\tau_\nu,\varepsilon)]$$

для всіх $\psi\in R^m,\tau\in R,t\in R,\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, з яких випливає, що $y=Y(\psi,\tau,\varepsilon)$ — інтегральний многовид системи (6). Для завершення доведення теореми залишилось покласти $X(\psi,\tau,\varepsilon)=\bar{x}(\tau,\varepsilon)+Y(\psi,\tau,\varepsilon)$.

1. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М.: Наука, 1974.— 504 с.

2. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием.— К.: Вища школа, 1987.— 288 с.

3. *Митропольский Ю.А., Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Метод усреднения в системах с импульсным воздействием // Укр. мат. журн.— 1985.— **37**, N1.— С.56—64.

4. *Самойленко А.М., Петришин Р.І.* Багаточастотні коливання нелінійних систем.— К.: Ін-т математики НАН України, 1998.— 340с.

5. *Астафьева М.Н.* Усреднение многочастотных колебательных систем с импульсным воздействием: Дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02.— К., 1987.— 103 с.

6. *Петришин Я. Р.* Усереднення багатоточкових задач для нелінійних коливних систем з повільно змінними частотами.: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.01.02.— К., 2001.— 131с.

7. *Петришин Р. І., Сопронюк Т.М.* Експоненціальна оцінка фундаментальної матриці лінійної імпульсної системи. // Укр. мат. журн.— 2001.— 53, N8.— С.1101—1109.

Одержано .02.2003