УДК 517.9

І. Д. Скутар

I. D. Skutar

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗКУ ОДНОГО ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ

CONSTRUCTION OF THE SOLUTION OF ONE INTEGRAL DIFFERENTIAL EQUATION

Using R. Langer's method, formal solution for integral differential equation is constructed as a result of asymptotic integration of one system of linear differential equations with a small parameter at a part of derivatives.

Використовуючи методику, запропоновану Р. Лангером, побудовано формальний розв'язок інтегро-диференціального рівняння, яке одержуємо при асимптотичному інтегруванні однієї системи лінійних диференціальних рівнянь з малим параметром при частині похідних.

Используя методику, предложенную Р. Лангером, построено формальное решение интегро-дифференциального уравнения, которое получено при асимптотическом интегрировании одной системы линейных дифференциальных уравнений с малым параметром при части производных.

У праці А. М. Самойленка [1] розглянута система рівнянь вигляду

$$u' = A(x)u + A_1(x)v,$$

$$\varepsilon v' = (B(x) + \varepsilon B_1(x))v + \varepsilon B_2(x)u,$$

де $u \in R^p, v \in R^2, A, A_1, B_1$ і B_2 – матриці, голоморфні по x в області $|x| \leq \rho$, ε – малий параметр, $B(x)$ – матриця Ейрі[2], яка має вигляд

$$B(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & 0 \end{pmatrix}.$$

Для цієї системи побудовано перетворення, що зводить її до системи рівнянь вигляду

$$\omega_1' = c_1(\varepsilon)\upsilon_1, \quad \omega_j' = 0, \quad j = \overline{2, p}, \tag{1}$$

$$\varepsilon\upsilon' = B(x)\upsilon + \varepsilon D_1(\varepsilon)\omega, \tag{2}$$

де $\upsilon = (\upsilon_1, \upsilon_2)$ – двовимірний вектор,

$$D_1(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 \\ d_1(\varepsilon) \end{pmatrix},$$

$c_1(\varepsilon), d_1(\varepsilon)$ – відомі формальні ряди. У процесі побудови розв'язків системи (1), (2) одержується інтегро-диференціальне рівняння вигляду

$$\varepsilon^2 \upsilon_1'' = x\upsilon_1 + \varepsilon c(\varepsilon) + 3\varepsilon\alpha(\varepsilon)\int\limits_0^x \upsilon_1(t)dt, \tag{3}$$

де $x \in \mathbb{R}$, $\alpha(\varepsilon)$ і $c(\varepsilon)$ – задані формальні ряди. Загальний розв'язок цього рівняння побудовано в [1] у вигляді степеневого ряду.

У даній статті будуємо формальний розв'язок рівняння (3) у вигляді розкладу за степенями малого параметра, використовуючи методику роботи Р. Лангера [3].

За допомогою диференціювання рівняння (3) зводиться до вигляду

$$\upsilon_1''' - \lambda^2 x\upsilon_1' - (\lambda^2 + 3\lambda\mu)\upsilon_1 = 0, \tag{4}$$

де $x \in \mathbb{R}$, $\lambda = \varepsilon^{-1}$ – великий параметр, $\mu(\lambda) = \alpha(\lambda^{-1})$.

Для побудови формальних розв'язків рівняння

$$\frac{d^n\upsilon}{dx^n} + \lambda\rho_1(x,\lambda)\frac{d^{n-1}\upsilon}{dx^{n-1}} + ... + \lambda^n\rho_n(x,\lambda)\upsilon = 0,$$

де λ – великий параметр і коефіцієнти

$$\rho_i(x,\lambda) = \sum_0^\infty \frac{\rho_{i,r}(x)}{\lambda^r}, \quad i = 1,2,...,n,$$

виражені у вигляді степеневого ряду за степенями $1/\lambda$, Р. Лангер [3] пропонує використовувати так зване допоміжне алгебраїчне рівняння вигляду

$$\chi^n + \rho_{1,0}(x)\chi^{n-1} + ... + \rho_{n,0}(x) = 0.$$

Отже, для рівняння (4) відповідне допоміжне алгебраїчне рівняння матиме вигляд

$$\chi^3 - x\chi = 0. \tag{5}$$

Рівняння (5) має корені $\chi_0 = 0$, $\chi_1 = x^{\frac{1}{2}}$, $\chi_2 = -x^{\frac{1}{2}}$. Для кожного із коренів χ_j заміна

$$\upsilon_1(x) = \exp\{\lambda\int\chi dx\}\sum_{n=0}^\infty \frac{\theta_n(x)}{\lambda^n}, \tag{6}$$

зводить рівняння (4) до вигляду

$$\sum_{n=0}^\infty \big(\lambda^2(3\chi^2-x)\theta_n' + \lambda^2(3\chi\chi'-1)\theta_n + \lambda(\chi''\theta_n + 3\chi'\theta_n' + 3\chi\theta_n'' - 3\mu\theta_n) + \theta_n'''\big)\lambda^{-n} = 0.$$

Враховуючи, що в лівій частині одержаної рівності маємо розклад за степенями $\frac{1}{\lambda}$, перепишемо її таким чином:

$$\sum_{n=0}^\infty \big((3\chi^2-x)\theta_n' + (3\chi\chi'-1)\theta_n + (\chi''\theta_{n-1} + 3\chi'\theta_{n-1}' + 3\chi\theta_{n-1}'' - 3\mu\theta_{n-1}) + \theta_{n-2}'''\big)\lambda^{-n} = 0,$$

де кожне θ_n з від'ємним індексом дорівнює 0. Функція (6) буде формальним розв'язком диференціального рівняння (4), якщо коефіцієнти θ_n задовольнятимуть систему рівнянь

$$(3\chi^2 - x)\theta_n' + (3\chi\chi' - 1)\theta_n = -(\chi''\theta_{n-1} + 3\chi'\theta_{n-1}' + 3\chi\theta_{n-1}'' - 3\mu\theta_{n-1}) - \theta_{n-2}''',$$

$$n = 0, 1, 2, ... \qquad (7)$$

Для будь-якого розв'язку рівняння (4) можна знайти вигляд коефіцієнтів θ_n. Кожне з рівнянь системи (7) може бути розв'язане як лінійне диференціальне рівняння першого порядку по відношенню до θ_n [4].

Зокрема, при $\chi = \chi_0$ система (7) матиме вигляд

$$-x\theta_n' - \theta_n = 3\mu\theta_{n-1} - \theta_{n-2}''' \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Поклавши в останнє рівняння $n = 0, 1, 2$, одержимо

$$x\theta_0' + \theta_0 = 0,$$

$$x\theta_1' + \theta_1 = -3\mu x^{-1},$$

$$x\theta_2' + \theta_2 = 9\mu^2 x^{-1} lnx + 6x^{-4}.$$

Частинні розв'язки цих рівнянь мають відповідно розв'язки

$$\theta_0(x) = x^{-1},$$

$$\theta_1 = -3\mu x^{-1} ln(x),$$

$$\theta_2 = 2Cx^{-4} + \frac{9}{2}\mu^2 C x^{-1} ln^2(x).$$

Продовжуючи цей процес, можемо отримати загальні формули для обчислення розв'язків системи (7):

$$\theta_{2m} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=0}^{2(m-k)} K(2(m-k), k, j)\mu^{2(m-k)} x^{-3k-1} ln^j x +$$

$$+K(2m,0,2m)\mu^{2m}x^{-1}ln^{2m}x, m=0,1,2,... \tag{8}$$

$$\theta_{2m+1}=\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=0}^{2(m-k)+1}K(2(m-k)+1,k,j)\mu^{2(m-k+1}x^{-3k-1}ln^{j}x+$$

$$+K(2m+1,0,2m+1)\mu^{2m+1}x^{-1}ln^{2m+1}x, m=0,1,2,...$$

з коефіцієнтами

$$K(i,k,j)=\begin{cases} 0, k=0, i\neq j,\\ \dfrac{(-3)^i}{i!}, k=0, i=j\neq 0,\\ \dfrac{(-1)^i(3k)!}{3^{k-j}j!k!k^{i-j}}-\sum\limits_{l=j}^{i-1}\dfrac{l!}{j!(3k)^{l-j+1}}\times\\ \times\big(\sum\limits_{n=l}^{i}K(i,k-1,n)\frac{n!}{l!}\delta_k-3K(i-1,k,l)\big), \text{в інших випадках.}\end{cases} \tag{9}$$

Тут

$$\delta_k=\begin{cases} 0, & n-l>3,\\ 1, & n-l=3,\\ 3(3k-1), & n-l=2,\\ 27k^2-18k+2, & n-l=1,\\ \dfrac{(3k)!}{(3k-3)!}, & n-l=0.\end{cases}$$

Для розв'язків $\chi=\pm x^{\frac{1}{2}}$ рівняння (5) система (7) матиме вигляд:

$$2x\theta_n'+\frac{1}{2}\theta_n=\mp\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}(3x\theta_{n-1}''+\frac{3}{2}\theta_{n-1}'-\frac{1}{4}x^{-1}\theta_{n-1})+3\mu\theta_{n-1}-\theta_{n-2}'''.$$

Як і в попередньому випадку, покладемо $n=0,1,2,...$ і розв'яжемо отримані лінійні диференціальні рівняння першого порядку по відношенню до θ_n. Розв'язками попередньої системи будуть функції

$$\theta_m=\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=0}^{m-k}K(m-k,k,j)\mu^{m-k}x^{-\frac{3}{2}k-\frac{1}{4}}\ln^j x+K(m,0,m)\mu^m x^{-\frac{1}{4}}\ln^m x,$$

$$m=0,1,2,\dots \tag{10}$$

з коефіцієнтами

$$K(i,k,j)=\begin{cases} 0, k<0, k=0, i\neq j,\\ \dfrac{(\frac{3}{2})^i}{i!}, k=0, i=j\neq 0,\\ -\frac{1}{2}\sum\limits_{l=j}^{i}\frac{l!(2)^{l-j+1}}{j!(3k)^{l-j+1}}\Big(\sum\limits_{n=l}^{i}K(i,k-1,n)\frac{n!}{l!}(\mp 3\delta_k^1\mp\frac{3}{2}\delta_k^2\pm\frac{1}{4}\delta_k^3)+\\ +3K(i-1,k,l)-\delta_k^0K(i,k-2,l)\Big)\Big), \text{в інших випадках,}\end{cases} \tag{11}$$

де

$$\delta_k^1=\begin{cases} 0, & n-l>2,\\ 1, & n-l=2,\\ -\dfrac{3k+3}{2}, & n-l=1,\\ \dfrac{(6k-5)(6k-1)}{16}, & n-l=0.\end{cases}$$

$$\delta_k^2=\begin{cases} 0, & n-l>1,\\ 1, & n-l=1,\\ -\dfrac{6k-5}{4}, & n-l=0.\end{cases}$$

$$\delta_k^3=\begin{cases} 0, & n-l\neq 0,\\ 1, & n-l=0.\end{cases}$$

$$\delta_k^0=\begin{cases} 0, & i-l>3,\\ 1, & i-l=3,\\ -\dfrac{18k-21}{4}, & i-l=2,\\ \dfrac{108k^2-252k+131}{16} & i-l=1,\\ -\dfrac{(6k-3)(6k-7)(6k-11)}{64}, & i-l=0.\end{cases}$$

Отже, ми отримали формальні розв'язки рівняння (4). Підставляючи знайдені розв'язки у відповідне для (3) однорідне рівняння, одержимо, що його задовольняють лише два з трьох знайдених вище розв'язків, а саме розв'язки при $\chi=\pm x^{\frac{1}{2}}$, що даються формулою (10) з коефіцієнтами (11).

Залишилося знайти частинний розв'язок рівняння (3). Покажемо, що цей розв'язок можна подати у вигляді

$$v(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} \sum_{i=0}^{2m-2k+1} C(m,k,i) x^{-3k-1} ln^i x. \tag{12}$$

Для цього підставимо вираз (12) у рівняння (3) і прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x. Розв'язавши систему, що отримали в результаті підстановки, знайдемо вигляд коефіцієнтів:

$$C(m,k,i) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{i+1}(3\alpha\varepsilon)^i}{i!} \varepsilon c(\varepsilon), k = 0, m = 0 \\ 0, k = 0, m \neq 0 \\ \dfrac{k\varepsilon^2}{k - \alpha\varepsilon} \big((-3k-5)(-3k-4)C(m,k-1,i)+ \\ +(-6k+3)(i+1)C(m,k-1,i+1)+ \\ +(i+2)(i+1)C(m,k-1,i+2)\big), \text{в інших випадках.} \end{cases} \tag{13}$$

Формальний розв'язок рівняння (3) одержується у вигляді лінійної комбінації

$$v_1 = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_3.$$

Тут y_1, y_2 даються формулами (6) у підстановці, замість χ, розв'язків $\chi_{1,2} = \pm x^{\frac{1}{2}}$ рівняння (5), а замість θ_n рівності (10) з коефіцієнтами (11). Частинний розв'язок y_3 дається формулою (12) з коефіцієнтами (13). C_1, C_2 – довільні сталі.

Приклад. Розглянемо рівняння

$$\varepsilon^2 v'' = xv, \tag{14}$$

яке одержується з (3) при $c(\varepsilon) = 0$ і $\alpha(\varepsilon) = 0$. Дане рівняння відоме як рівняння Ейрі [2]. Продиференціюємо обидві частини рівняння (14).

Отримаємо рівняння

$$\varepsilon^2 \upsilon''' = x\upsilon' + \upsilon. \tag{15}$$

Випишемо розв'язки для цього рівняння, використовуючи формули (8) та (10). Одержимо

$$\upsilon_1 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{k_m x^{-3m-1}}{\lambda^{2m}}, \quad k_m = \frac{(3m)!}{3^m m!}$$

$$\upsilon_2 = x^{-\frac{1}{4}} e^{\frac{2}{3}\lambda x^{\frac{3}{2}}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{k_m x^{-\frac{3}{2}m}}{\lambda^m},$$

$$k_m = \frac{1}{3m}[k_{m-1}(3\frac{(6m-1)(6m-5)}{16} - \frac{3}{2}\frac{6m-5}{4} - \frac{1}{4}) -$$
$$-k_{m-2}\frac{(6m-3)(6m-7)(6m-11)}{64}]$$

$$\upsilon_3 = x^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{2}{3}\lambda x^{\frac{3}{2}}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{k_m x^{-\frac{3}{2}m}}{\lambda^m},$$

$$k_m = -\frac{1}{3m}[k_{m-1}(3\frac{(6m-1)(6m-5)}{16} - \frac{3}{2}\frac{6m-5}{4} - \frac{1}{4}) +$$
$$+k_{m-2}\frac{(6m-3)(6m-7)(6m-11)}{64}]$$

Підставляючи отримані розв'язки в рівняння Ейрі, одержимо, що υ_2 і υ_3 перетворюють це рівняння у тотожність. Варто також зазначити, що розв'язки υ_2 і υ_3 збігаються із розв'язками рівняння Ейрі, одержаними В. Вазовим у монографії [2].

1. Самойленко А.М. Об асимптотическом интегрировании одной системы линейных дифференциальных уравнений с малым параметром при части производных // Український математичний журнал – 2002. – **54**, № 11. – С. 1505 - 1516.

2. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1968. – 464 с.

3. Langer R.E. The solutions of the differential equation $\upsilon''' + \lambda^2 z\upsilon' + 3\mu\lambda^2\upsilon = 0$ // Duke Math. J. – 1955. – **22**. – P. 525–542.

4. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1971. – 576 с.